# Helsingin seitsemäsluokkalaisten matematiikkakilpailuiden loppukilpailu 21.4.2016 Ratkaisuita

**1.** Pascalin kolmio määritellään kirjoittamalla ensin 1, sitten sen alle kaksi ykköstä, ja uusi rivi on aina yhden pidempi kuin edellinen rivi ja se muodostetaan kirjoittamalla rivien päihin ykköset viistoon edellisen rivin ulkopuolelle ja sen jälkeen muut rivin jäsenet muodostetaan kirjoittamalla aina kahden luvun alle niiden summa:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}
$$

....................................

Kuinka monta lukua 10 on Pascalin kolmiossa?

**Ratkaisu.** Alku Pascalin kolmiosta näyttää seuraavalta.

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccccccc}
 & & & & & & & & & & 1 & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 6 & & \dots & & \dots & & \dots & & 6 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 7 & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & 7 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 8 & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & 8 & & 1 & & \\
 & 1 & & 9 & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & 9 & & 1 & \\
1 & & 10 & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & 10 & & 1
\end{array}
$$

..................................................................................

Tästä eteenpäin reunaykkösiä vaille kaikki on kymmentä suurempaa. Siispä luku 10 esiintyy neljä kertaa.

**2.** Mikä on luvun 3/7 sadas desimaali?

**Ratkaisu.** Laskemalla osamäärää 3/7 jakokulmalla saadaan

$$0{,}4285714\dots$$

Koska jakokulman laskemisessa jokainen uusi desimaali riippuu vain edellisestä, näemme, että desimaalit toistavat itseään kuuden jaksoissa. Erityisesti, desimaalipilkun jälkeen joka kuudes desimaali on 1. Täten 96. desimaali on 1, minkä jälkeen 97. desimaali on 4, 98. desimaali on 2, 99. desimaali on 8, ja lopuksi kysytty 100. desimaali on 5.

**3.** Tiedetään, että

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + 10^3 = 3025,$$

ja että

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + 20^3 = 44100.$$

Mitä onkaan

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3 + \dots + 19^3?$$

**Ratkaisu.** Kysytyn luvun voi kirjoittaa annettujen lukujen avulla:

$$
\begin{aligned}
&1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3 + \dots + 19^3 \\
&= 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + 20^3 - \left(2^3 + 4^3 + 6^3 + \dots + 20^3\right) \\
&= 44100 - 8\left(1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 10^3\right) \\
&= 44100 - 8 \cdot 3025 = 44100 - 24200 = 19900.
\end{aligned}
$$

**4.** Tarkastellaan merkeistä $\heartsuit$ ja $\diamondsuit$ muodostettuja jonoja. Saamme tehdä jonoille kolmenlaisia operaatioita:

- Voimme aina pyyhkiä pois kaksi peräkkäistä $\heartsuit$-merkkiä;
- voimme aina korvata peräkkäiset merkit $\heartsuit\diamondsuit\heartsuit$ peräkkäisillä merkeillä $\diamondsuit\diamondsuit$; ja kääntäen
- voimme aina korvata peräkkäiset merkit $\diamondsuit\diamondsuit$ peräkkäisillä merkeillä $\heartsuit\diamondsuit\heartsuit$.

Selvitä, miten näillä operaatioilla voi jonon $\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit$ muuttaa jonoksi $\diamondsuit$.

**Ratkaisu.** Voimme toteuttaa operaatioita näin:

$$\begin{aligned}
&\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit \longmapsto \heartsuit\diamondsuit\heartsuit\heartsuit\diamondsuit\heartsuit\diamondsuit\heartsuit\diamondsuit\heartsuit \longmapsto \heartsuit\diamondsuit\diamondsuit\heartsuit\diamondsuit\heartsuit\diamondsuit\heartsuit \longmapsto \heartsuit\heartsuit\diamondsuit\heartsuit\heartsuit\diamondsuit\heartsuit\diamondsuit\heartsuit \\
&\qquad \longmapsto \diamondsuit\diamondsuit\heartsuit\diamondsuit\heartsuit \longmapsto \heartsuit\diamondsuit\heartsuit\heartsuit\diamondsuit\heartsuit \longmapsto \heartsuit\diamondsuit\diamondsuit\heartsuit \longmapsto \heartsuit\heartsuit\diamondsuit\heartsuit\heartsuit \longmapsto \diamondsuit.
\end{aligned}$$

**5.** Positiivisesta kokonaisluvusta tiedetään, että sen jakojäännös viidellä jaettaessa on kaksi. Mitkä ovat mahdolliset jakojäännökset, kun kyseinen luku jaetaan seitsemällä?

**Ratkaisu.** Jakojäännös seitsemällä jaettaessa on aina joko 0, 1, 2, 3, 4, 5 tai 6. Osoitamme, että nämä kaikki ovat mahdollisia: nimittäin, luvuille 7, 12, 17, 22, 27, 32 ja 37 pätee

$$\begin{aligned}
&7 = 1 \cdot 7 + 0, \quad 12 = 1 \cdot 7 + 5, \quad 17 = 2 \cdot 7 + 3, \quad 22 = 3 \cdot 7 + 1, \\
&\qquad 27 = 3 \cdot 7 + 6, \quad 32 = 4 \cdot 7 + 4, \quad \text{ja} \quad 37 = 5 \cdot 7 + 2.
\end{aligned}$$

**6.** Tasossa on 100 suoraa. Jotkin niistä voivat olla yhdensuuntaisia yhden tai usemman muun suoran kanssa, mutta mitkään kolme eivät leikkaa samassa pisteessä. Onko mahdollista, että suorilla on kaikkiaan tasan 2016 leikkauspistettä?

**Ratkaisu.** On mahdollista: piirretään ensin 72 keskenään yhdensuuntaista suoraa, ja sitten 28 keskenään yhdensuuntaista suoraa, jotka ovat erisuuntaisia kuin aiemmat. Näin syntyy $72 \cdot 28 = 2016$ leikkauspistettä.