Helsingin seitsemäsluokkalaisten matematiikkakilpailu 6–10.3.2017 Ratkaisuita

1. Laske $466 - 21$.

a) 445 **b)** 412 **c)** -412 **d)** 455 **e)** 499

Ratkaisu. $466 - 21 = 445$.

2. Laske $23 \cdot 25$.

a) 565 **b)** 575 **c)** 585 **d)** 595 **e)** 605

Ratkaisu. $23 \cdot 25 = 575$.

3. Halutaan aidata suorakaiteen muotoinen alue, jonka pinta-ala on $100\,\mathrm{m}^2$. Mikä seuraavista vaihtoehdoista vie vähiten aitaa?

a) $5\,\mathrm{m} \times 20\,\mathrm{m}$ **b)** $10\,\mathrm{m} \times 10\,\mathrm{m}$ **c)** $1\,\mathrm{m} \times 100\,\mathrm{m}$ **d)** $25\,\mathrm{m} \times 4\,\mathrm{m}$ **e)** $2\,\mathrm{m} \times 50\,\mathrm{m}$

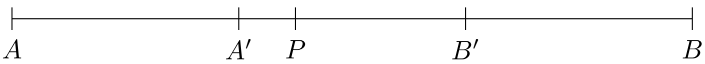
Ratkaisu. Vaihtoehdossa a) aitaa kuluu $5 + 5 + 20 + 20 = 50$ metriä, vaihtoehdossa b) $10 + 10 + 10 + 10 = 40$ metriä, vaihtoehdossa c) $1 + 1 + 100 + 100 = 202$ metriä, vaihtoehdossa d) $25 + 25 + 4 + 4 = 58$ metriä, ja vaihtoehdossa e) $2 + 2 + 50 + 50 = 104$ metriä. Näistä vähiten aitaa kuluu vaihtoehdossa b).

4. Käytettävissä on 10 litran ämpäri ja 100 litran saavi. Mitkä seuraavista vesilitramääristä voidaan mitata näitä käyttämällä?

a) 1, 15 ja 20 **b)** 5 ja 10 **c)** 62 **d)** 20 ja 60 **e)** Kaikki vaihtoehdoista.

Ratkaisu. Koska luvut 10 ja 100 ovat molemmat kymmenellä jaollisia, on mitattavissa olevan vesimäärän oltava kymmenellä jaollinen. Ainoa tällainen mahdollisuus on vaihtoehto d). (Litramäärät voidaan mitata täyttämällä 10 litran ämpäri vedellä, kaatamalla vesimäärä 100 litran saaviin ja toistamalla tätä riittävän monta kertaa.)

5. Janan AB pituus on 1. Pisteet A' ja B' jakavat janan AB kolmeen yhtä suureen osaan ja sijaitsevat janalla kuten kuvassa, eli $AA' = A'B' = B'B$. Piste P sijaitsee janalla AB pisteiden A' ja B' välissä. Lisäksi on voimassa $3 \cdot A'P = PB'$. Laske AP.



a) $\frac{1}{3}$ **b)** $\frac{5}{12}$ **c)** $\frac{4}{9}$ **d)** $\frac{1}{2}$ **e)** $\frac{2}{3}$

Ratkaisu. Ensinnäkin $AA' = A'B' = \frac{1}{3}$. Koska lisäksi $A'P + PB' = \frac{1}{3}$ ja $3 \cdot A'P = PB'$, on $4 \cdot A'P = \frac{1}{3}$. Siis $A'P = \frac{1}{12}$. Lopuksi, koska $AP = AA' + A'P$, on $AP = \frac{1}{3} + \frac{1}{12} = \frac{5}{12}$.

6. Aluksi jogurtin litrahinta on 1,00 euroa. Vuoden kuluttua suhdanteiden muuttuessa litrahinta nousee 10 %, kaksi vuotta myöhemmin litrahinta laskee 20 %, ja kolme vuotta myöhemmin litrahinta nousee 50 %. Kuinka paljon litra jogurttia tämän jälkeen maksaa?

a) 0,77 euroa **b)** 1,32 euroa **c)** 1,13 euroa **d)** 1,54 euroa **e)** 1,98 euroa

Ratkaisu. Ensimmäisen hinnankorotuksen jälkeen litrahinta on 1,10 euroa, hinnanlaskun jälkeen 0,88 euroa, ja toisen hinnannousun jälkeen 1,32 euroa.

7. Määritellään uusi laskutoimitus tutun yhteen- ja kertolaskun avulla: $a \otimes b = 3a + 7b$. Esimerkiksi $3 \otimes 2 = 23$. Mitä on

$$(1 \otimes 2) + (3 \otimes 4)?$$

a) 51 **b)** 52 **c)** 53 **d)** 54 **e)** 55

Ratkaisu. Laskemalla suoraan

$$(1 \otimes 2) + (3 \otimes 4) = (3 \cdot 1 + 7 \cdot 2) + (3 \cdot 3 + 7 \cdot 4) = 3 + 14 + 9 + 28 = 54.$$

8. Monellako luvuista 2^1, 2^2, 2^3, ..., 2^{100} ykkösiä merkitsevä numero (eli viimeinen numero) on 6? [Tässä 2^N tarkoittaa tuloa $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2$, missä luku 2 esiintyy N kertaa.]

a) 22 **b)** 23 **c)** 24 **d)** 25 **e)** 26

Ratkaisu. Potenssien 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, ... viimeiset numerot ovat

$$2, \quad 4, \quad 8, \quad 6, \quad 2, \quad 4, \quad 8, \quad 6, \quad \ldots$$

Tulon viimeinen numero riippuu vain tulontekijöiden viimeisistä numeroista, ja siksi tämä jono toistaa itseään neljän lohkoissa, ja viimeisistä numeroista joka neljäs on 6. Siis numeroon 6 päättyvät potenssit ovat 2^4, 2^8, 2^{12}, ..., 2^{100}, joita on täsmälleen 25 kappaletta.

9. Päiväkotiryhmässä on 21 lasta, joista kukin puhuu vähintään yhtä kieltä. Tiedetään, että viisi lasta puhuu ainakin suomea ja venäjää, kuusi lasta puhuu ainakin suomea ja ruotsia, ja kolme lapsista puhuu ainakin ruotsia ja venäjää. Lisäksi tiedetään, että kaksi lasta puhuu suomea, ruotsia ja venäjää, sekä että kukaan ei puhu muita kieliä. Miten moni lapsista puhuu täsmälleen yhtä kieltä?

a) tehtävä ei ratkea annetuilla tiedoilla **b)** ei kukaan **c)** 10 **d)** 8 **e)** 11

Ratkaisu. Jos lasketaan yhteen annetut luvut 5, 6 ja 3, niin kaikkia kolmea kieliä puhuvat on laskettu kolmeen kertaan. Siispä vähintään kahta kieltä puhuvien lukumäärä on

$$5 + 6 + 3 - 2 \cdot 2 = 10.$$

Loppujen 21 päiväkotilaisesta on puhuttava täsmälleen yhtä kieltä ja heitä on siis $21 - 10 = 11$ henkilöä.

10. Mitä seuraavista numeroista ei esiinny luvun $\dfrac{58}{333}$ kymmenjärjestelmäesityksessä (eli desimaaliesityksessä)?

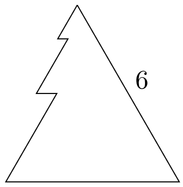
a) 1 **b)** 4 **c)** 7 **d)** 9 **e)** Kaikki edellä mainitut esiintyvät.

Ratkaisu. Voimme laskea, että

$$\frac{58}{333} = \frac{3 \cdot 58}{999} = \frac{174}{999} = 0{,}174174174\ldots$$

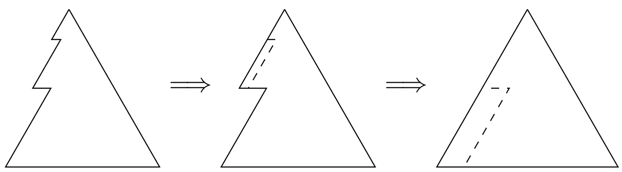
Siispä numero 9 ei esiinny desimaalikehitelmässä.

11. Mikä on seuraavan kuvion piiri (eli reunan pituus)? Kaikki siinä esiintyvät kulmat ovat 60° ja 300° kulmia.



a) 15 **b)** 16 **c)** 17 **d)** 18 **e)** 19

Ratkaisu. Ei ole vaikea muuttaa kuvio sen piiriä muuttamatta tasasivuiseksi kolmioksi, jonka sivun pituus on 6, täydentämällä sitä kahdella suunnikkaalla:



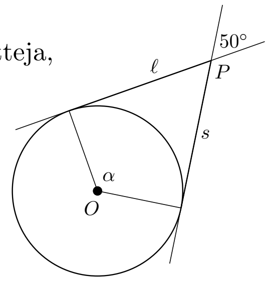
Täten kuvion piiri on $3 \cdot 6 = 18$.

12. Šakkiturnaukseen osallistuu viisi pelaajaa A, B, C, D ja E. Kukin pelaa kerran jokaista muuta vastaan. Lounastaukoon mennessä A on pelannut neljä peliä, B on pelannut kolme peliä, C kaksi peliä ja D yhden pelin. Montako peliä E on pelannut?

a) 0 **b)** 1 **c)** 2 **d)** 3 **e)** 4

Ratkaisu. A on pelannut kaikkia pelaajia vastaan, myös pelaajaa E vastaan. Toisaalta, D on pelannut ainoan pelinsä pelaajaa A vastaan, joten D ei ole pelannut peliä pelaajan E kanssa, eikä pelaajan B kanssa. Pelaaja B on pelannut pelaajista A, C, D ja E kolmen kanssa mutta ei pelaajan D kanssa. Siis pelaaja B on pelannut pelaajien A, C ja E kanssa. Lopuksi, nyt tiedämme, että pelaaja C on pelannut toisen peleistään pelaajan A kanssa, toisen pelaajan B kanssa, eikä C siis ole voinut pelata pelaajan E kanssa. Täten pelaaja E on pelannut yhden pelin pelaajan A kanssa ja yhden pelaajan B kanssa, eli kaikkiaan kaksi peliä.

13. Piste O on kuvan ympyrän keskipiste ja suorat ℓ ja s sen tangentteja, jotka leikkaavat 50° kulmassa pisteessä P. Kuinka suuri on kulma α?



a) 100°
b) 130°
c) 155°
d) 170°
e) 200°

Ratkaisu. Olkoon suoran ℓ ja ympyrän leikkauspiste A sekä suoran s ja ympyrän leikkauspisten B. Nyt kulma $\angle APB = 50^\circ$ ristikulmana. Koska ℓ ja s ovat ympyrän tangentteja, niin $\angle PBO = \angle OAP = 90^\circ$. Lisäksi koska $APBO$ on nelikulmio, niin

$$\alpha = 360^\circ - \angle PBO - \angle OAP - \angle APB = 360^\circ - 2 \cdot 90^\circ - 50^\circ = 130^\circ.$$

14. Laske $\left(1+\frac{1}{7}\right)\left(1+\frac{1}{7+1}\right)\left(1+\frac{1}{7+2}\right)\left(1+\frac{1}{7+3}\right)\left(1+\frac{1}{7+4}\right)\left(1+\frac{1}{7+5}\right)\left(1+\frac{1}{7+6}\right)\left(1+\frac{1}{7+7}\right)$.

a) $\dfrac{1}{7 \cdot (7+1) \cdots (7+7)}$ **b)** $\dfrac{2}{7 \cdot (7+1) \cdots (7+7)}$ **c)** $2 + \dfrac{1}{7}$

d) $1 + \dfrac{1}{7 \cdot (7+1) \cdots (7+7)}$ **e)** $2 + \dfrac{1}{7 \cdot (7+1) \cdots (7+7)}$

Ratkaisu. Laventamalla samannimisiksi saadaan

$$1 + \frac{1}{7+k} = \frac{7+k+1}{7+k}$$

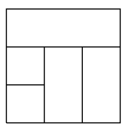
jokaisella luvun k arvoista 0, 1, 2, ..., 7. Siis

$$\left(1+\frac{1}{7}\right)\left(1+\frac{1}{7+1}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{7+7}\right) = \frac{(7+1)\,(7+2)\cdots(7+8)}{7 \cdot (7+1) \cdots (7+7)}.$$

Supistamalla jäljelle jää vain

$$\frac{7+8}{7} = 2 + \frac{1}{7}.$$

15. Väritetään allaolevan kuvion alueet siten, että käytössä on sininen, punainen, keltainen ja vihreä väri ja mitkään kaksi vierekkäistä aluetta kuviossa eivät saa olla samanvärisiä. Monellako eri tavalla kuvion voi värittää?



a) 84 **b)** 88 **c)** 92 **d)** 96 **e)** 100

Ratkaisu. Voimme vapaasti valita ylimmän suorakaiteen värin neljällä eri tavalla. Nyt sitä naapurustavien kolmen alueen värit voi valita joko niin, että ne väritetään kolmella eri värillä, minkä voi tehdä kuudella eri tavalla, tai niin että ne väritetään kahdella värillä, minkä voi myös tehdä kuudella eri tavalla. Lopuksi, vasemman alanurkan voi aina värjätä kahdella eri tavalla. Siispä erilaisia värityksiä on $4 \cdot (6+6) \cdot 2 = 96$ erilaista.