Oulun seutukunnan seitsemäsluokkalaisten matematiikkakilpailu 20.–24.2.2017
Ratkaisuja

1. Laske $538 - 489$.

a) -39 **b)** 59 **c)** 77 **d)** 25 **e)** 49

Ratkaisu. $538 - 489 = 49$.

2. Laske $7 \cdot 6 - 6 \cdot 5 + 5 \cdot 4 - 4 \cdot 3 + 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1$.

a) 16 **b)** 20 **c)** 24 **d)** 28 **e)** 32

Ratkaisu. $7 \cdot 6 - 6 \cdot 5 + 5 \cdot 4 - 4 \cdot 3 + 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = 6 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 12 + 8 + 4 = 24$.

3. Laske $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$.

a) 2350 **b)** 32925 **c)** 330510 **d)** 900000 **e)** 12000000

Ratkaisu. Koska $2 \cdot 5 = 10$, on $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 100000$. Lisäksi $3 \cdot 3 = 9$, joten $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 900000$.

4. Olkoon N erään neliön pinta-ala. Olkoon K sellaisen suorakulmaisen kolmion pinta-ala, jonka toinen kateetti on yhtä pitkä kuin edellisen neliön sivu ja toinen katetti kaksi kertaa neliön sivun mittainen. Mitä voidaan sanoa pinta-alojen N ja K keskinäisestä suuruusjärjestyksestä?

a) $N = K$ **b)** $N > K$ **c)** $N < K$ **d)** Vastaus riippuu neliön sivun pituudesta.
e) Tehtävää ei voi ratkaista annetuin tiedoin.

Ratkaisu. Olkoon x neliön sivun pituus. Nyt $x^2 = N$ ja

$$K = \frac{2x \cdot x}{2} = x^2 = N.$$

5. Kuinka monella eri tavalla voi valita positiiviset kokonaisluvut x ja y niin, että $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$?

a) 0 **b)** 1 **c)** 4 **d)** 100 **e)** Äärettömän monella eri tavalla.

Ratkaisu. Koska $y > 0$, niin $x \geqslant 2$ ja samoin myös $y \geqslant 2$. Toisaalta, jos $x \geqslant 3$, niin $\frac{1}{y} \geqslant 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} > \frac{1}{2}$. Mutta $y \geqslant 2$, joten $\frac{1}{y} < \frac{1}{2}$, Siis ei voi olla $x \geqslant 3$. Vastaavasti $y < 3$. Siis ainoa tapa valita luvut x ja y on asettaa $x = y = 2$.

6. Šakkiturnaukseen osallistuu viisi pelaajaa. Kukin pelaa kerran jokaista muuta vastaan. Pelin voitosta saa yhden pisteen, häviöstä nolla pistettä ja tasapelistä puoli pistettä. Turnauksen lopussa A:lla on 3 pistettä, B:llä 2,5, C:llä 1,5 ja D:llä 0,5 pistettä. Montako pistettä on E:llä?

a) 2 **b)** 2,5 **c)** 3 **d)** 3,5 **e)** 4

Ratkaisu. Yhteensä pelejä pelataan $4 + 3 + 2 + 1 = 10$. Riippumatta pelin lopputuloksesta, jokaisesta pelistä pelaajat saavat yhteensä yhden pisteen. Yhteensä pisteitä on siis jaossa 10. E:llä on pisteitä siis $10 - (3 + 2{,}5 + 1{,}5 + 0{,}5) = 2{,}5$.

7. Suureen säilytyslaatikkoon mahtuu 50 kg nallekarkkeja. Laatikon tekemiseen (seinät, lattia, kansi) on kulunut $2\,\mathrm{m}^2$ pahvia. Kuinka paljon pahvia kuluu sellaisen samanmuotoisen laatikon tekemiseen, johon mahtuu 400 kg nallekarkkeja?

a) $4\,\mathrm{m}^2$ **b)** $6\,\mathrm{m}^2$ **c)** $8\,\mathrm{m}^2$ **d)** $16\,\mathrm{m}^2$ **e)** $20\,\mathrm{m}^2$

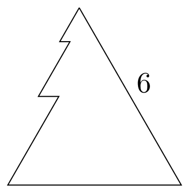
Ratkaisu. Kun laatikon mitat kerrotaan jollakin vakiolla a, niin uuden laatikon tilavuus tulee samalla kerrotuksi potenssilla a^3. Haluamme, että $50\,a^3\,\mathrm{kg} = 400\,\mathrm{kg}$, eli että $a^3 = 8 = 2^3$. Siis on oltava $a = 2$, eli laatikon mitat on kaksinkertaistettava. Tällöin laatikon osien pinta-alat nelinkertaistuvat, eli pahvia kuluu $2 \cdot a^2\,\mathrm{m}^2 = 2 \cdot 2^2\,\mathrm{m}^2 = 8\,\mathrm{m}^2$.

8. Laske $2^{2017} - 2^{2016}$. Tässä 2^n merkitsee tuloa $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2$, missä luku 2 esiintyy n kertaa.

a) 1 **b)** 2 **c)** $2^{\frac{2016}{2017}}$ **d)** 2^{2016} **e)** Ei mikään edellisistä vaihtoehdoista.

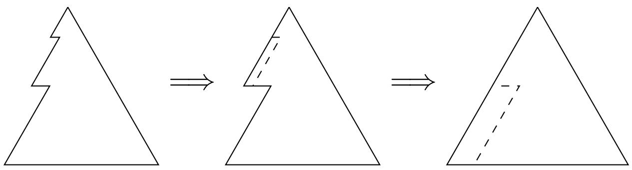
Ratkaisu. Otetaan 2^{2016} yhteiseksi tekijäksi, jolloin saadaan $2^{2017} - 2^{2016} = 2^{2016}(2-1) = 2^{2016}$.

9. Mikä on seuraavan kuvion piiri (eli reunan pituus)? Kaikki siinä esiintyvät kulmat ovat joko 60° tai 300°.



a) 15 **b)** 16 **c)** 17 **d)** 18 **e)** 19

Ratkaisu. Ei ole vaikea muuttaa kuvio sen piiriä muuttamatta tasasivuiseksi kolmioksi, jonka sivun pituus on 6, täydentämällä sitä kahdella suunnikkaalla:



Täten kuvion piiri on $3 \cdot 6 = 18$.

10. Määritellään uusi laskutoimitus tavallisen yhteen- ja kertolaskun avulla: $a \oplus b = 3a - b$. Esimerkiksi $5 \oplus 6 = 3 \cdot 5 - 6 = 9$. Laske

$$(1 \oplus 1) + (2 \oplus 2) + (3 \oplus 3).$$

a) 10 **b)** 12 **c)** 14 **d)** 16 **e)** 18

Ratkaisu. Laskemalla suoraan

$$(1 \oplus 1) + (2 \oplus 2) + (3 \oplus 3) = (3 \cdot 1 - 1) + (3 \cdot 2 - 2) + (3 \cdot 3 - 3) = 2 + 6 - 2 + 9 - 3 = 12.$$

11. Piirretään 10 suoraa tasoon. Montako leikkauspistettä kuvassa voi enimmillään olla?

a) 40 **b)** 45 **c)** 50 **d)** 55 **e)** 60

Ratkaisu. Lisätään suoria kuvaan yksi kerrallaan. Ensimmäinen suora ei anna yhtään leikkauspistettä. Toinen suora voi leikata ensimmäisen. Kolmas suora voi leikata molemmat kaksi suoraa. Neljäs suora voi leikata kaikki kolme ja niin edelleen. Yhteensä leikkauspisteitä voi olla siis korkeintaan $0 + 1 + 2 + \cdots + 9 = 45$.

12. Päiväkotiryhmässä on 21 lasta. Tiedetään, että viisi lasta puhuu ainakin suomea ja englantia, kuusi lasta puhuu ainakin suomea ja ruotsia, ja kolme lapsista puhuu ainakin ruotsia ja englantia. Lisäksi tiedetään, että kaksi lasta puhuu suomea, ruotsia ja englantia. Kuinka moni lapsista puhuu täsmälleen kahta kielistä suomi, ruotsi ja englanti?

a) Tehtävä ei ratkea annetuilla tiedoilla. **b)** Ei kukaan. **c)** 5 **d)** 8 **e)** 12

Ratkaisu. Jos lasketaan yhteen annetut luvut 5, 6 ja 3, niin kaikkia kolmea kieliä puhuvien lukumäärä on laskettu mukaan kolmella kerrottuna. Siispä täsmälleen kahta kieltä puhuvien lukumäärän on oltava

$$5 + 6 + 3 - 3 \cdot 2 = 14 - 6 = 8.$$

13. Olkoon n pariton positiivinen kokonaisluku. Mikä on suurin positiivinen kokonaisluku, jolla molemmat luvuista $n + 7$ ja $n^2 + 7n + 2$ ovat jaollisia?

a) 1 **b)** 1 tai 2, riippuen luvun n arvosta.
c) 2 **d)** 1 tai 3, riippuen luvun n arvosta. **e)** 3

Ratkaisu. Jos d on suurin positiivinen kokonaisluku, joka jakaa molemmat luvuista $n + 7$ ja $n^2 + 7n + 2$ niin sen on silloin jaettava myös luku

$$n^2 + 7n + 2 - n\,(n + 7) = 2,$$

ja täten d on joko 1 tai 2. Mutta kun n on pariton, luvut $n + 7$ ja $n^2 + 7n + 2$ ovat molemmat parillisia, ja täten aina $d = 2$.

14. Kahden positiivisen kokonaisluvun erotus on kymmenen. Kun luvut kerrotaan keskenään, saadaan tulokseksi jokin seuraavista viidestä luvusta. Mikä niistä?

a) 372 **b)** 375 **c)** 382 **d)** 383 **e)** 387

Ratkaisu. Olkoot luvut x ja y. Niillä täytyy olla sama viimeinen numero, olkoon se d. Tulon viimeinen numero riippuu vain tulontekijöiden viimeisistä numeroista, ja siten tulon xy viimeinen numero on sama kuin luvun d^2 viimeinen numero. Mutta d^2 on $0^2 = 0$, $1^2 = 1$, $2^2 = 4$, $3^2 = 9$, $4^2 = 16$, $5^2 = 25$, $6^2 = 36$, $7^2 = 49$, $8^2 = 64$ tai $9^2 = 81$ eli tulon xy viimeinen numero ei voi olla 2, 3 eikä 7. Tämän vuoksi annetuista vaihtoehdoista vain 375 on mahdollinen. Todettakoon vielä lopuksi, että $375 = 15 \cdot 25$.

15. Liimataan 27 tavallista kuusisivuista noppaa yhteen yhdeksi isoksi $3 \times 3 \times 3$ -kuutioksi. Mikä on pienin mahdollinen tulos, kun lasketaan kaikki näkyvissä olevat silmäluvut yhteen? Nopassa vastakkaisten sivujen silmälukujen summa on aina 7.

a) 120 **b)** 135 **c)** 84 **d)** 101 **e)** 90

Ratkaisu. Koska vastakkaisten sivujen summa on aina 7, huomataan, että sivut 1 ja 2 ovat nopassa aina vierekkäin, ja 3 niiden molempien vieressä. Liimataan nopat siis siten, että jokaisesta nurkkanopasta näkyvissä on luvut 1, 2 ja 3, jokaisesta sivunopasta näkyy 1 ja 2 ja jokaisesta tahkonopasta vain 1. Nurkkia on 8, sivuja on 12 ja tahkoja 6. Nyt lasketaan kaikki yhteen: $8 \cdot (1 + 2 + 3) + 12 \cdot (1 + 2) + 6 \cdot 1 = 90$.