

TURUN ALUEEN SEITSEMÄSLUOKKALAISTEN FINAALI 2017

RATKAISUITA

1. Talo on suorakulmaisen särmiön muotoinen, sen korkeus on 3 m, pituus 6 m ja leveys 20 m. Halutaan rakentaa mökki, joka on suorakulmaisen särmiön muotoinen, korkeus on 2,5 m ja jonka tilavuus on puolet talon tilavuudesta. Kuinka suuri on mökin lattian pinta-ala?

Ratkaisu. Talon tilavuus on $3 \text{ m} \cdot 6 \text{ m} \cdot 20 \text{ m} = 360 \text{ m}^3$, joten mökin tilavuus on $\frac{1}{2} \cdot 360 \text{ m}^3 = 180 \text{ m}^3$. Koska mökin korkeus on 2,5 m, niin sen lattian pinta-ala on $\frac{180 \text{ m}^3}{2,5 \text{ m}} = 72 \text{ m}^2$.

2. Merkinnällä $[x]$ tarkoitetaan suurinta kokonaislukua, joka on pienempi tai yhtä suuri kuin luku x . Esimerkiksi $[1] = 1$ ja $[\frac{1}{2}] = 0$. Merkitään $\{x\} = x - [x]$.

a) Laske $\{\frac{1}{10}\}$, $\{2 \cdot \frac{1}{10}\}$, $\{3 \cdot \frac{1}{10}\}$ ja $\{11 \cdot \frac{1}{10}\}$.

b) Kuinka monella kokonaisluvulla k , $1 \leq k \leq 2017$, pätee $\{k \cdot \frac{1}{10}\} = \frac{7}{10}$?

Ratkaisu. a) Määritelmän mukaan $\{\frac{1}{10}\} = \frac{1}{10} - [\frac{1}{10}] = \frac{1}{10} - 0 = \frac{1}{10}$. Vastaavasti $\{2 \cdot \frac{1}{10}\} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$, $\{3 \cdot \frac{1}{10}\} = \frac{3}{10}$ ja $\{11 \cdot \frac{1}{10}\} = \frac{1}{10}$.

b) Luku k voidaan kirjoittaa muodossa $k = 10n + m$, missä m ja n ovat epänegatiivisia kokonaislukuja ja $0 \leq m \leq 9$. Nyt

$$\left\{k \cdot \frac{1}{10}\right\} = \left\{\frac{10n + m}{10}\right\} = \left\{n + \frac{m}{10}\right\} = n + \frac{m}{10} - \left[n + \frac{m}{10}\right] = n + \frac{m}{10} - n - \left[\frac{m}{10}\right] = \left\{\frac{m}{10}\right\}.$$

Lisäksi $\{\frac{m}{10}\} = \frac{m}{10}$. Täytyy siis olla $m = 7$ ja $1 \leq 10n + 7 \leq 2017$ eli $0 \leq n \leq 201$. Vastauksia on siis 202 kappaletta.

3. Eräässä kylässä jokaisen asukkaan joka toinen lause on totta, ja joka toinen valetta. Kylässä on yksi pääkatu, jonka varressa on taloja, joista mitkään kaksi eivät ole saman värisiä. Matkamies saapuu kylään. Hän puhuu kolmen vastaantulevan asukkaan kanssa. Asukas saattaa aloittaa todella tai valheellisella väittämällä. Matkamiehelle kerrotaan seuraavat asiat:

Asukas 1:

1. Kylässä on 4 taloa.
2. Kolmas talo vasemmalta on harmaa.
3. Kolmas talo oikealta on musta.
4. Viides talo oikealta on oranssi.

Asukas 2:

1. Kylässä on 5 taloa.
2. Toinen talo vasemmalta on harmaa.
3. Toinen talo oikealta on punainen.
4. Toinen talo vasemmalta on musta.

Asukas 3:

1. Kylässä on 6 taloa.
2. Oikeanpuoleisin talo on keltainen.
3. Toinen talo vasemmalta on sininen.
4. Toinen talo vasemmalta on vihreä.

Kuinka monta taloa kylässä on, ja missä järjestyksessä talot sijaitsevat?

Ratkaisu. Huomataan aluksi, että asukkaiden 1 ja 2 ensimmäiset virkkeet eivät voi olla yhtä aikaa totta. Myöskään heidän molempien toiset lauseet eivät voi pitää paikkansa. Siis toisen ensimmäinen ja toisen toinen lause on tosi. Täten kylässä on neljä tai viisi taloa. Kolmannen ensimmäinen väite on siis epätosi, ja toinen ja neljäs väite tosi. Oikeanpuoleisin talo on keltainen, ja toinen vasemmalta on vihreä. Koska toinen vasemmalta on vihreä, ei toisen asukkaan viimeinen väite voi pitää paikkansa. Siispä kylässä on viisi taloa, ja toinen oikealta on punainen. Täten ensimmäisen asukkaan ensimmäinen väite on valhe, joten kolmas talo vasemmalta on harmaa ja viides oikealta oranssi. Kylässä on siis viisi taloa, ja järjestys vasemmalta oikealle on oranssi, vihreä, harmaa, punainen ja keltainen.

4. Alkuluku on positiivinen kokonaisluku, joka on suurempi kuin 1 ja jaollinen vain itsellään ja luvulla 1. Esimerkiksi luvut 2 ja 3 ovat alkulukuja, kun taas 6 ja 1 eivät ole. Onko luku 2017 kahden alkuluvun summa?

Ratkaisu. Oletetaan, että luku 2017 olisi kahden alkuluvun summa. Kahden parillisen luvun summa on parillinen ja samoin kahden parittoman luvun summa on parillinen. Näin ollen luvun 2017 pitää olla parillisen ja parittoman luvun summa, koska se on pariton luku. Luku 2 on ainoa parillinen alkuluku, sillä kaikki parilliset luvut ovat jaollisia luvulla 2. Näin ollen on oltava voimassa $2017 = 2 + p$, missä p on pariton alkuluku. Täten on oltava $p = 2015$. Mutta luku 5 jakaa luvun 2015, joten 2015 ei ole alkuluku. Siis 2017 ei ole kahden alkuluvun summa.

5. Suomen pinta-alaltaan kolme suurinta kuntaa ovat Inari, Sodankylä ja Enontekiö. Kesälomalla halutaan vierailla kussakin kunnassa. Matkaan lähdetään Turusta ja palataan takaisin samaan kaupunkiin. Missä järjestyksessä kunnissa kannattaa käydä, jotta matkustuksen määrä olisi mahdollisimman pieni? Kuntien välimatkat löytyvät alla olevasta taulukosta.

Kaupungit	Välimatka
Turku ja Inari	1170 km
Turku ja Sodankylä	970 km
Turku ja Enontekiö	1090 km
Inari ja Sodankylä	200 km
Inari ja Enontekiö	245 km
Sodankylä ja Enontekiö	225 km

Ratkaisu. Ratkaistaan tehtävä laskemalla kaikki mahdolliset reittien pituudet. Koska kunnasta A kuntaan B on yhtä pitkä matka kuin kunnasta B kuntaan A, niin laskettavia reittien pituuksia on $3 \cdot 2 \cdot 1/2 = 3$ kappaletta. Reittivaihtoehdot Turku–Inari–Sodankylä–Enontekiö–Turku, Turku–Inari–Enontekiö–Sodankylä–Turku ja Turku–Enontekiö–Inari–Sodankylä–Turku kattavat kaikki eri reittien pituudet. Lasketaan näiden reittien pituudet.

Turku–Inari–Sodankylä–Enontekiö–Turku: $1170 \text{ km} + 200 \text{ km} + 225 \text{ km} + 1090 \text{ km} = 2685 \text{ km}$.

Turku–Inari–Enontekiö–Sodankylä–Turku: $1170 \text{ km} + 245 \text{ km} + 225 \text{ km} + 970 \text{ km} = 2610 \text{ km}$.

Turku–Enontekiö–Inari–Sodankylä–Turku: $1090 \text{ km} + 245 \text{ km} + 200 \text{ km} + 970 \text{ km} = 2505 \text{ km}$.

Kannattaa siis matkustaa Turku–Enontekiö–Inari–Sodankylä–Turku tai Turku–Sodankylä–Inari–Enontekiö–Turku.