Turun alueen seitsemäsluokkalaisten matematiikkakilpailu 27.2.–3.3.2017
Ratkaisuita

1. Laske $369 - 248$.

a) 101 **b)** 120 **c)** 121 **d)** 130 **e)** 137

Ratkaisu. Koska $369 - 248 = 121$, on oikea vastaus c).

2. Laske $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 0$.

a) 1000 **b)** 0 **c)** 12345 **d)** 1760 **e)** 429

Ratkaisu. Koska nollalla kerrottaessa tulos on aina nolla, on oikea vastaus b) 0.

3. Laske $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$.

a) 2350 **b)** 32925 **c)** 330510 **d)** 900000 **e)** 12000000

Ratkaisu. Koska $2 \cdot 5 = 10$, on $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 100000$. Lisäksi $3 \cdot 3 = 9$, joten $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 900000$.

4. Suureen säilytyslaatikkoon mahtuu 50 kg nallekarkkeja. Laatikon tekemiseen (seinät, lattia, kansi) on kulunut $2\,\mathrm{m}^2$ pahvia. Kuinka paljon pahvia kuluu sellaisen samanmuotoisen laatikon tekemiseen, johon mahtuu 400 kg nallekarkkeja?

a) $4\,\mathrm{m}^2$ **b)** $6\,\mathrm{m}^2$ **c)** $8\,\mathrm{m}^2$ **d)** $16\,\mathrm{m}^2$ **e)** $20\,\mathrm{m}^2$

Ratkaisu. Kun laatikon mitat kerrotaan jollakin vakiolla a, niin uuden laatikon tilavuus tulee samalla kerrotuksi potenssilla a^3. Haluamme, että $50\,a^3\,\mathrm{kg} = 400\,\mathrm{kg}$, eli että $a^3 = 8 = 2^3$. Siis on oltava $a = 2$, eli laatikon mitat on kaksinkertaistettava. Tällöin laatikon osien pinta-alat nelinkertaistuvat, eli pahvia kuluu $2 \cdot a^2\,\mathrm{m}^2 = 2 \cdot 2^2\,\mathrm{m}^2 = 8\,\mathrm{m}^2$.

5. Käytettävissä on 10 litran ämpäri ja 100 litran saavi. Mitkä seuraavista vesilitramääristä voidaan mitata näitä mittoja käyttämällä?

a) 1, 15 ja 20 **b)** 5 ja 10 **c)** 62 **d)** 20 ja 60 **e)** Kaikki vaihtoehdoista.

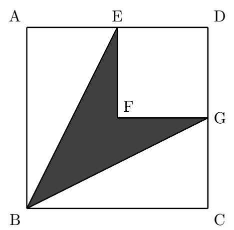
Ratkaisu. Koska luvut 10 ja 100 ovat molemmat kymmenellä jaollisia, on mitattavissa olevan vesimäärän oltava kymmenellä jaollinen. Ainoa tällainen mahdollisuus on vaihtoehto d). (Litramäärät voidaan mitata täyttämällä 10 litran ämpäri vedellä, kaatamalla vesimäärä 100 litran saaviin ja toistamalla tätä riittävän monta kertaa.)

6. Halutaan aidata suorakaiteen muotoinen alue, jonka pinta-ala on $100\,\mathrm{m}^2$. Mikä seuraavista vaihtoehdoista vie vähiten aitaa?

a) $5\,\mathrm{m} \times 20\,\mathrm{m}$ **b)** $10\,\mathrm{m} \times 10\,\mathrm{m}$ **c)** $1\,\mathrm{m} \times 100\,\mathrm{m}$ **d)** $25\,\mathrm{m} \times 4\,\mathrm{m}$ **e)** $2\,\mathrm{m} \times 50\,\mathrm{m}$

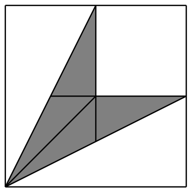
Ratkaisu. Vaihtoehdossa a) aitaa kuluu $5 + 5 + 20 + 20 = 50$ metriä, vaihtoehdossa b) $10 + 10 + 10 + 10 = 40$ metriä, vaihtoehdossa c) $1 + 1 + 100 + 100 = 202$ metriä, vaihtoehdossa d) $25 + 25 + 4 + 4 = 58$ metriä, ja vaihtoehdossa e) $2 + 2 + 50 + 50 = 104$ metriä. Näistä vähiten aitaa kuluu vaihtoehdossa b).

7. Kuvio $ABCD$ on neliö. Piste E on janan AD puolivälissä, G on janan CD puolivälissä ja F on neliön keskipiste. Kuinka iso osa neliöstä on väritetty?



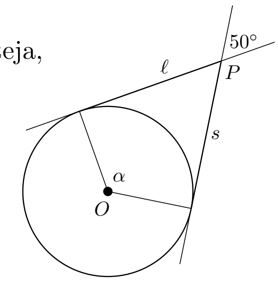
a) $\frac{1}{2}$ **b)** $\frac{2}{7}$ **c)** $\frac{2}{3}$ **d)** $\frac{3}{5}$ **e)** $\frac{1}{4}$

Ratkaisu. Kuvion voi pilkkoa kolmioiksi, joiden kanta on $\frac{1}{4}$ neliön sivun pituudesta ja korkeus $\frac{1}{2}$ neliön sivun pituudesta.



Harmaassa osassa kolmioita on neljä ja koko kuvion ala on 16 kertaa kyseisenlaisen kolmion ala. Väritetty osuus on siis $\dfrac{4}{16} = \dfrac{1}{4}$.

8. Piste O on kuvan ympyrän keskipiste ja suorat ℓ ja s sen tangentteja, jotka leikkaavat $50°$ kulmassa pisteessä P. Kuinka suuri on kulma α?



a) $100°$
b) $130°$
c) $155°$
d) $170°$
e) $200°$

Ratkaisu. Olkoon suoran ℓ ja ympyrän leikkauspiste A sekä suoran s ja ympyrän leikkauspisten B. Nyt kulma $\angle APB = 50°$ ristikulmana. Koska ℓ ja s ovat ympyrän tangentteja, niin $\angle PBO = \angle OAP = 90°$. Lisäksi koska $APBO$ on nelikulmio, niin

$$\alpha = 360° - \angle PBO - \angle OAP - \angle APB = 360° - 2 \cdot 90° - 50° = 130°.$$

9. Päiväkotiryhmässä on 21 lasta, joista kukin puhuu vähintään yhtä kieltä. Tiedetään, että viisi lasta puhuu ainakin suomea ja venäjää, kuusi lasta puhuu ainakin suomea ja ruotsia, ja kolme lapsista puhuu ainakin ruotsia ja venäjää. Lisäksi tiedetään, että kaksi lasta puhuu suomea, ruotsia ja venäjää, sekä että kukaan ei puhu muita kieliä. Miten moni lapsista puhuu täsmälleen yhtä kieltä?

a) tehtävä ei ratkea annetuilla tiedoilla **b)** ei kukaan **c)** 10 **d)** 8 **e)** 11

Ratkaisu. Jos lasketaan yhteen annetut luvut 5, 6 ja 3, niin kaikkia kolmea kieliä puhuvat on laskettu kolmeen kertaan. Siispä vähintään kahta kieltä puhuvien lukumäärä on

$$5 + 6 + 3 - 2 \cdot 2 = 10.$$

Loppujen 21 päiväkotilaisesta on puhuttava täsmälleen yhtä kieltä ja heitä on siis $21 - 10 = 11$ henkilöä.

10. Kuinka monta kaikille ympyröille yhteistä pistettä kolmella eri ympyrällä voi olla?

a) Vain 0 **b)** 0, 1 tai 2 **c)** 0, 1, 2 tai 3 **d)** 0, 1, 2 tai 4 **e)** 0, 1, 2, 3 tai 4

Ratkaisu. Tarkastellaan ensin kahta ympyröistä. Niillä voi olla 0, 1 tai 2 yhteistä pistettä. Havaitaan, että jos kahdella ympyrällä on 0, 1 tai 2 yhteistä pistettä, niin pisteet, jotka ovat yhteisiä kaikille kolmelle ympyrälle kuuluvat välttämättä näihin 0, 1 tai 2 pisteeseen, ja on helppo todeta, että nämä kaikki ovat mahdollisia tapauksia. Siis vastaus on, että kolmella eri ympyrällä on 0, 1 tai 2 kaikille kolmelle ympyrälle yhteistä pistettä.

11. Laske $2^{2017} - 2^{2016}$. Tässä 2^n merkitsee tuloa $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2$, missä luku 2 esiintyy n kertaa.

a) 1 **b)** 2 **c)** $2^{\frac{2016}{2017}}$ **d)** 2^{2016} **e)** Ei mikään edellisistä vaihtoehdoista.

Ratkaisu. Otetaan 2^{2016} yhteiseksi tekijäksi, jolloin saadaan $2^{2017} - 2^{2016} = 2^{2016}(2-1) = 2^{2016}$.

12. Määritellään uusi laskutoimitus tutun yhteen- ja kertolaskun avulla: $a \oplus b = 3a - b$. Esimerkiksi $5 \oplus 6 = 3 \cdot 5 - 6 = 9$. Mitä on

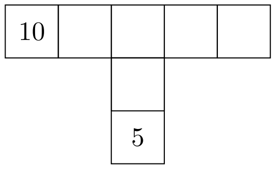
$$(1 \oplus 1) + (2 \oplus 2)?$$

a) 2 **b)** 3 **c)** 4 **d)** 5 **e)** 6

Ratkaisu. Laskemalla suoraan

$$(1 \oplus 1) + (2 \oplus 2) = (3 \cdot 1 - 1) + (3 \cdot 2 - 2) = 2 + 6 - 2 = 6.$$

13. Kuvan ruudukkoon on sijoitettu luvut 10 ja 5. Loput ruudut täytetään lukuja 1, 2, ..., 9 käyttäen. Missään kahdessa eri ruudussa ei saa olla samaa lukua. Lisäksi ylimmällä rivillä olevien lukujen on oltava suuruusjärjestyksessä suuremmista pienempiin vasemmalta oikealle, ja keskimmäisen sarakkeen lukujen on oltava suuruusjärjestyksessä suuremmista pienempiin ylhäältä alas. Kuinka monelle eri tavalla kuvan ruudukko voidaan täyttää näiden ehtojen mukaan?



a) 0 **b)** 1 **c)** 5 **d)** 16 **e)** 32

Ratkaisu. Ylimmän rivin keskimmäiseen ruutuun voidaan sijoittaa enintään luku 8 ja vähintään luku 7 johtuen lukujen 10 ja 5 sijainneista. Tarkastellaan ensin tilannetta, että ylimmän rivin keskimmäisessä ruudussa on luku 8. Näin ollen vasemmalta luettuna ylimmän rivin toinen luku on 9. Toiseksi alimpaan ruutuun voidaan sijoittaa luku 7 tai 6. Tästä luvusta riippuen jäljellä on luvut 6 tai 7 sekä $1, 2, 3$ ja 4. Kun toisiksi alin ruutu on täytetty, voidaan loppuruudukko täyttää $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ eri tavalla. Jos siis ylimmän rivin keskimmäisessä ruudussa on luku 8, niin ruudukko voidaan täyttää $2 \cdot 10 = 20$ eri tavalla.

Tarkastellaan tapausta, jossa ylimmän rivin keskimmäisessä ruudussa on luku 7. Nyt toisiksi alimmassa ruudussa on oltava luku 6. Ylimmän rivin toiseen ruutuun vasemmalta luettuna voidaan sijoittaa luku 9 tai 8. Jäljellä on siis tämän luvun valinnasta riippuen luvut 9 tai 8 sekä $1, 2, 3$ ja 4. Lukuja 8 ja 9 ei voida laittaa ylimmän rivin kahteen vasemman puoleiseen ruutuun, koska ne ovat suurempia kuin luku 7. Kun ylimmän rivin toinen ruutu on täytetty, voidaan loppuruudukko täyttää $3 + 2 + 1 = 6$ eri tavalla. Jos siis ylimmän rivin keskimmäisessä ruudussa on luku 7, niin ruudukko voidaan täyttää $2 \cdot 6 = 12$ eri tavalla. Kaiken kaikkiaan ruudukko voidaan siis täyttää $20 + 12 = 32$ eri tavalla.

14. Kahden positiivisen kokonaisluvun erotus on kymmenen. Kun ne kerrotaan keskenään, saadaan tuloksena jokin seuraavista viidestä luvusta. Mikä niistä?

a) 372 **b)** 375 **c)** 382 **d)** 383 **e)** 387

Ratkaisu. Olkoot luvut x ja y. Niillä täytyy olla sama viimeinen numero, olkoon se d. Tulon viimeinen numero riippuu vain tulontekijöiden viimeisistä numeroista, ja siten tulon xy viimeinen numero on sama kuin luvun d^2 viimeinen numero. Mutta d^2 on $0^2 = 0$, $1^2 = 1$, $2^2 = 4$, $3^2 = 9$, $4^2 = 16$, $5^2 = 25$, $6^2 = 36$, $7^2 = 49$, $8^2 = 64$ tai $9^2 = 81$ eli tulon xy viimeinen numero ei voi olla 2, 3 eikä 7. Tämän vuoksi annetuista vaihtoehdoista vain 375 on mahdollinen. Todettakoon vielä lopuksi, että $375 = 15 \cdot 25$.

15. 1800-luvulla syntynyt ja kuollut matemaatikko Augustus de Morgan vietti x-vuotissyntymäpäiviään vuonna $x \cdot x$. Minä vuonna de Morgan syntyi? Ei voi olla esimerkiksi $x = 40$, koska tällöin de Morgan olisi viettänyt vuonna $40 \cdot 40 = 1600$ syntymäpäiväänsä, ja jos hän olisi tällöin ollut 40-vuotias, hän olisi syntynyt jo vuonna $1560 = 1600 - 40$.

a) 1800 **b)** 1806 **c)** syntymävuodella on useita vaihtoehtoja **d)** 1848 **e)** 1849

Ratkaisu. Tehtävän voi ratkaista kokeilemalla. Luku 1806 on muotoa $43 \cdot 43 - 43 = 1806$, siispä de Morgan vietti vuonna $43 \cdot 43 = 1849$ 43-vuotissyntymäpäiviään.

Muita vaihtoehtoja ei ole, sillä $44 \cdot 44 > 1900$, mutta de Morgan kuoli jo 1800-luvulla, joten tämä ei ole mahdollista (vastaava päättely toimii kaikkiin lukuihin, jotka ovat vähintään 44). Toisaalta $42^2 < 1800$, mutta de Morgan syntyi vasta 1800-luvulla, joten tämäkään ei ole mahdollista (vastaava päättely toimii lukuihin, jotka ovat pienempiä kuin 42).