Oulun seudun 7-luokkalaisten matematiikkakilpailun finaali 2018
Ratkaisuja

1. Tässä tehtävässä riittää antaa vastaus ilman perusteluja. Vastaus on positiivinen kokonaisluku.

a) Laske $1 - 9 + 10 - 90 + 100 - 900 + 1000 - 9000 + 10000$.

Ratkaisu. Suoraan laskemalla saadaan

$$\begin{aligned} &1 - 9 + 10 - 90 + 100 - 900 + 1000 - 9000 + 10000 \\ &= 1 + 1 + 10 + 100 + 1000 \\ &= 1112. \end{aligned}$$

b) Kahdeksan koiraa syö 44 säkillistä ruokaa vuodessa. Kuinka monta säkillistä ruokaa kaksitoista koiraa syö puolessa vuodessa?

Ratkaisu. Koska kahdeksan koiraa syö 44 säkillistä ruokaa vuodessa, niin neljä koiraa syö 22 säkillistä ruokaa vuodessa. Täten kaksitoista koiraa syö $3 \cdot 22 = 66$ säkillistä ruokaa vuodessa. Siis puolessa vuodessa kaksitoista koiraa syö

$$\frac{66}{2} = 33$$

säkillistä ruokaa.

2. Luvuista x ja y tiedetään, että

$$(x + 2y)\,(x + 2y) = 2\,(2x + y)\,y.$$

Selvitä luvut x ja y.

Ratkaisu. Yhtälö sievenee ensin muotoon

$$x^2 + 4xy + 4y^2 = 4xy + 2y^2,$$

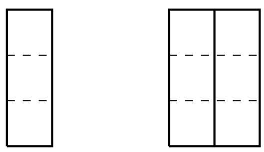
ja edelleen muotoon

$$x^2 + 2y^2 = 0.$$

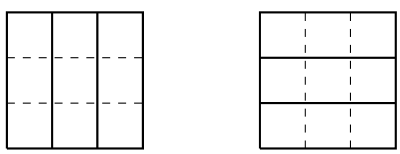
Mutta koska kaikilla luvuilla x ja y pätee $x^2 \geqslant 0$ ja $y^2 \geqslant 0$, voi olla $x^2 + 2y^2 = 0$ vain, jos sekä $x^2 = 0$ että $y^2 = 0$. Tai toisin sanoen, yhtälö pätee täsmälleen silloin kun $x = y = 0$.

3. Lattiassa on (3×10)-kokoinen suorakaiteen muotoinen alue, joka halutaan laatoittaa (3×1)-kokoisilla suorakaiteen muotoisilla laatoilla. Kuinka monella eri tavalla laatoituksen voi tehdä?

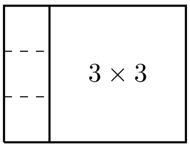
Ratkaisu. Ratkaistaan ongelma myös pienemmille laatoitettaville suorakaiteille. Kun $n = 1$, 2, 3, $\ldots$, olkoon Ξ_n se luku, kuinka monella eri tavalla voidaan laatoittaa $(3 \times n)$-suorakaide (3×1)-kokoisilla suorakaiteen muotoisilla laatoilla. On varsin ilmeistä, että $\Xi_1 = 1$ ja $\Xi_2 = 1$:

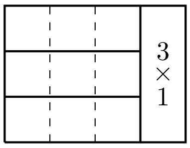


Samoin (3×3)-alueen tapauksessa voidaan vain asettaa kolme laattaa samansuuntaisesti, minkä voi tehdä kahdella eri tavalla, ja siten $\Xi_3 = 2$:



Laatoitetaan sitten (3×4)-suorakaidetta vasemmalta lähtien. Joko vasemmalle tulee yksi laatta pystyyn, ja jäljelle jäävän (3×3)-alueen voi laatoittaa Ξ_3 eri tavalla, tai vasemmalle tulee kolme laattaa vaakasuoraan, jolloin jäljelle jäävän (3×1)-alueen voi laatoittaa Ξ_1 eri tavalla:

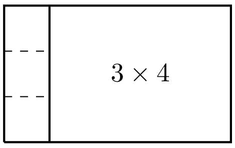


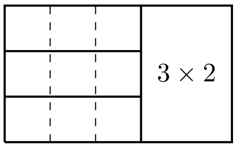


Siten on oltava

$$\Xi_4 = \Xi_3 + \Xi_1 = 2 + 1 = 3.$$

Aivan samalla tavoin (3×5)-alueen vasemmalle puolelle voi laittaa joko yhden laatan pystyyn tai kolme laattaa vaakasuoraan:





Siten

$$\Xi_5 = \Xi_4 + \Xi_2 = 3 + 1 = 4.$$

Jatkamalla päättelyä tällä tavoin saadaan

$$\begin{aligned} \Xi_6 &= \Xi_5 + \Xi_3 = 4 + 2 = 6, \\ \Xi_7 &= \Xi_6 + \Xi_4 = 6 + 3 = 9, \\ \Xi_8 &= \Xi_7 + \Xi_5 = 9 + 4 = 13, \\ \Xi_9 &= \Xi_8 + \Xi_6 = 13 + 6 = 19, \end{aligned}$$

ja lopuksi

$$\Xi_{10} = \Xi_9 + \Xi_7 = 19 + 9 = 28.$$

Siten erilaisia tapoja laatoittaa (3×10)-alue on 28 erilaista.

4. Mikä on suurin mahdollinen kuusinumeroinen kokonaisluku, jonka numerot ovat $0, 1, 2, 3, 4$ ja 5 jossain järjestyksessä ja jonka jokaisen kahden vierekkäisen numeron summa on alkuluku? (Luku on alkuluku, jos se on lukua 1 suurempi kokonaisluku, joka on jaollinen vain itsellään ja luvulla 1.)

Ratkaisu. Tutkitaan, minkä lukujen vieressä kukin luku voi olla, jotta niiden summa on alkuluku. Nämä tulokset löytyvät alla olevasta taulukosta. Luku on mahdollisimman suuri, kun sen numerot vasemmalta lukien ovat mahdollisimman suuria. Yritetään tämän takia löytää sellainen luku, jonka ensimmäinen numero on 5. Tällöin toinen numero on 2 eli luku alkaa 52, koska numero 2 on suurin mahdollinen numeron 5 vieressä olevista numeroista. Suurin numero, joka voi olla luvun 2 vieressä ja joka ei ole vielä luvussa, on 3. Mutta jos luvun kolmas numero on 3, niin nolla ei voi esiintyä luvussa, koska sen on oltava numeroiden $2, 3$ tai 5 vieressä. Oletetaan siis, että kolmas numero on 1. Nyt luvun alku on 521. Taulukon mukaan neljännen numeron on oltava 4 eli luvun alku on 5214. Nyt seuraavan numeron on oltava 3 ja viimeisen 0. Siis kysytty luku on 521430.

Luku	Luvut, joiden vieressä voi olla
0	$2, 3, 5$
1	$2, 4$
2	$0, 1, 3, 5$
3	$0, 2, 4$
4	$1, 3$
5	$0, 2$

5. Erään matematiikkakilpailun alkukilpailussa on 15 monivalintatehtävää. Kuhunkin tehtävään on täsmälleen yksi oikea vastaus, vastausvaihtoehtoja on viisi, oikeasta vastauksesta saa yhden pisteen ja väärästä sekä tyhjästa vastauksesta nolla pistettä. Alkuperäisten tulosten mukaan oppilaat saivat pisteitä alla olevan taulukon mukaisesti. Alkuperäisten tulosten kirjaamisen jälkeen huomattiin, että yksi tehtävä oli pisteytetty kaikilta oppilailta väärin ja tulokset korjattiin. Loppukilpailuun kutsuttavien kilpailijoiden pisteraja on suurin pistemäärä, jonka on saavuttanut tai ylittänyt vähintään 20 kilpailijaa. Mitkä ovat tulosten korjaamisen jälkeen mahdollisia arvoja tälle pisterajalle? Huomaa, että vastauksia voi olla useita.

Pistemäärä	Pistemäärän saaneiden oppilaiden määrä
15	1
14	7
13	13
12	21
11	27

Ratkaisu. Tarkastellaan, kuinka moni henkilö saa korjauksen jälkeen minkäkin pistemäärän. Jokaisen oppilaan pistemäärä nousee tai laskee korjatussa pisteytyksessä yhdellä. Lisäksi pistemäärän 15 saaneen oppilaan pistemäärä on tarkistuksen jälkeen 14, koska se ei voi nousta. Havaitaan, että loppukilpailun pisterajan on oltava vähintään 12, sillä vaikka kaikkien taulukoitujen henkilöiden pisteet laskisivat korjauksessa yhdellä, niin vähintään 12 pistettä saaneiden määrä on $1 + 7 + 13 = 21 > 20$. Lisäksi vähintään 13 pistettä saaneiden määrä on $1 + 7 = 8 < 20$. Näin havaitaan, että 12 pistettä on mahdollinen pisteraja loppukilpailuun. Toisaalta loppukilpailun pisteraja ei voi olla 15 pistettä, koska sen saavuttaa enintään 7 oppilasta. Siis loppukilpailun pisteraja on enintään 14 pistettä.

Todetaan vielä, että 13 ja 14 pistettä ovat mahdollisia pisterajoja. Oletetaan, että kaikkien 15 tai 14 pistettä virheellisessä kokeen tarkistuksessa saaneiden pistemäärä laskee ja kaikkien 13 pistettä saaneiden pistemäärä nousee, kun virhe korjataan. Tällöin pistemäärän 14 saavuttaa $1 + 13 < 14$ oppilasta ja pistemäärän 13 vähintään $1 + 13 + 7 = 21 > 20$ oppilasta eli pisteraja on 13. Oletetaan nyt, että virheellisessä tarkistuksessa pistemäärän 14 tai 13 saaneiden pisteet nousevat, kun virhe korjataan. Tällöin pistemäärän 15 on saanut $7 < 20$ kilpailijaa ja pistemäärän 14 on saavuttanut $7 + 14 = 21$ kilpailijaa. Siis pisteraja on 14. Täten mahdolliset pisterajat ovat $12, 13$ ja 14.