Satakunnan seitsemäsluokkalaisten matematiikkakilpailun loppukilpailu 2018
Ratkaisuita

1. Tässä tehtävässä pelkät vastaukset riittävät. Sanassa jokainen kirjain korvataan aakkosissa seuraavalla kirjaimella ja viimeinen aakkosten kirjain (Ö) korvataan kirjaimella A. Esimerkiksi siis kirjain A korvataan kirjaimella B, kirjain B kirjaimella C ja kirjain M kirjaimella N.

(a) Millä kirjaimilla kirjaimet E ja O korvataan?

(b) Miten sana $AUTO$ kirjoitetaan korvauksen jälkeen?

(c) Mikä sana $GJCPOBDDJ$ oli ennen kirjainten korvausta?

Ratkaisu.

(a) Kirjaimet E ja O korvataan kirjaimilla F ja P.

(b) Sana $AUTO$ kirjoitetaan korvauksen jälkeen $BVUP$.

(c) Sana $GJCPOBDDJ$ oli ennen kirjainten korvausta $FIBONACCI$.

2. Tarkastellaan $2\text{cm} \times 2\text{cm} \times 3\text{cm}$-kokoista suorakulmaista särmiötä. Se on täytetty kuutioilla, joiden sivujen pituudet ovat senttimetreissä kokonaislukuja ja jotka kaikki eivät ole samankokoisia. Kuinka monta kuutiota suorakulmaisen särmiön sisällä on?

Ratkaisu. Yhden suorakulmaisen särmiön sisällä olevan kuution sivun pituus on enintään 2cm, koska kaksi särmiön sivuista ovat 2cm pitkiä. Siis kuutioiden sivujen pituudet voivat olla 1cm ja 2cm. Koska kaikki sisällä olevat kuutiot eivät ole samankokoisia, on ainakin yhden kuution sivun pituuden oltava 2cm. Kaikkien loppujen kuutioiden sivujen pituuksien on oltava 1cm suorakulmaisen särmiön mittojen takia. Niille jäljellä jäävä tilavuus suorakulmaisessa särmiössä on

$$2\text{cm} \cdot 2\text{cm} \cdot 3\text{cm} - 2\text{cm} \cdot 2\text{cm} \cdot 2\text{cm} = 4\text{cm}^3.$$

Niitä on siis neljä, koska yhden $1\text{cm} \times 1\text{cm} \times 1\text{cm}$ kuution tilavuus on 1cm^3. Yhteensä kuutioita on viisi. (Tällainen täyttö on selvästi mahdollinen. Nimittäin esimerkiksi suorakulmainen särmiö, joka muodostuu isommasta kuutiosta ja sen päällä olevasta neljästä pienemmästä kuutiosta, toteuttaa halutut ehdot.)

3. Onko mahdollista täyttää 2×2-ruudukko kokonaisluvuilla niin, että

(a) toisessa vaakarivissä olevien lukujen summa on positiivinen ja toisessa negatiivinen sekä toisessa pystyrivissä olevien lukujen summa on positiivinen ja toisessa negatiivinen?

(b) molempien vaakarivien lukujen summa on positiivinen ja molempien pystyrivien lukujen summa on negatiivinen?

1	2
-2	-1

Ratkaisu. Osoitetaan, että a-kohdan tilanne on mahdollinen, mutta b-kohdan tilanne ei ole. Yllä olevassa taulukossa vaakarivien lukujen summat ovat $1 + 2 = 3 > 0$ ja $-2 + (-1) = -3 < 0$ eli toinen summista on positiivinen ja toinen negatiivinen. Pystyrivien summat ovat $1 - 2 = -1 < 0$ ja $2 - 1 = 1 > 0$ eli toinen on negatiivinen ja toinen positiivinen. Siis taulukon täyttö on mahdollista a-kohdan ehdoilla.

Osoitetaan vielä, ettei b-kohdan tilanne ole mahdollinen. Taulukossa olevien lukujen summa on nimittäin sama kuin vaakarivien summa tai vastaavasti pystyrivien summa. Jos vaakarivien summat ovat positiivisia, niin tämä tarkoittaa, että kaikkien taulukossa olevien lukujen summan on oltava myös positiivinen. Mutta jos pystyrivien summat ovat negatiivisia, niin taulukossa olevien lukujen summan on oltava negatiivinen. Samojen lukujen summa ei voi olla samanaikaisesti positiivinen ja negatiivinen, joten b-kohdan tilanne ei ole mahdollinen.

4. Kaupassa myydään mehutiivisteitä A, B ja C. Niitä laimennetaan veteen suhteissa $1:5$, $1:6$ ja $1:7$ vastaavasti. Tiivistettä A myydään yhden litran, tiivistettä B 7,5 desilitran ja tiivistettä C 1,5 litran pakkauksissa. Yksi pakkaus tiivistettä A maksaa 1,62 euroa, tiivistettä B 1,68 euroa ja tiivistettä C 3,36 euroa. Mitä mehutiivistettä ostetaan, kun halutaan yhden lasillisen mehua käyvän mahdollisimman halvaksi?

Ratkaisu. Lasketaan, kuinka paljon litra valmista mehua kullakin tiivisteellä maksaa. Nimittäin hinnat litralla mehua ja lasillisella mehua ovat samassa suuruusjärjestyksessä. Lasketaan ensin, kuinka paljon kutakin tiivistettä tarvitaan litraan mehua. Laimennussuhteiden takia tiivistettä A tarvitaan $\frac{1}{6}$ litraa, tiivistettä B $\frac{1}{7}$ litraa ja tiivistettä C $\frac{1}{8}$ litraa. Lasketaan nyt, kuinka paljon kukin näistä tiivistemääristä maksaa. Lasketaan ensin, kuinka paljon litra mitäkin tiivistettä maksaa. Litra tiivistettä A maksaa 1,62 euroa, tiivistettä B $1{,}68 \cdot \frac{4}{3} = 2{,}24$ euroa ja litra tiivistettä C $3{,}36 \cdot \frac{2}{3} = 2{,}24$ euroa. Nyt siis litraan mehua tarvittava tiivistemäärä maksaa $\frac{1}{6} \cdot 1{,}62 = 0{,}27$ euroa tiivisteellä A, $\frac{1}{7} \cdot 2{,}24 = 0{,}32$ euroa tiivisteellä B ja $\frac{1}{8} \cdot 2{,}24 = 0{,}28$ euroa tiivisteellä C. Täten tiivisteellä A mehulasillisen hinta tulee halvimmaksi eli ostetaan sitä.

5. Neljä ihmistä matkustaa autossa ja yksi heistä kysyy seuraavan kysymyksen: ”Minä olen syntynyt huhtikuussa 1970 ja te olette syntyneet heinäkuussa 1971, kesäkuussa 1994 sekä tammikuussa 2001. Ovatko meidän kaikkien ikämme vuosissa joskus olleet tai tulevatko ne olemaan samanaikaisesti alkulukuja?” Mikä on oikea vastaus tähän kysymykseen? (Luku on alkuluku, jos se on lukua 1 suurempi kokonaisluku, joka on jaollinen vain itsellään ja luvulla 1.)

Ratkaisu. Koska 2 on pienin alkuluku ja nuorin henkilöistä on syntynyt tammikuussa 2001, niin kaikkien iät ovat voineet olla alkulukuja aikaisintaan tammikuussa 2003. Vuoden 2003 aikana kesäkuussa 1994 syntyneen henkilön ikä vuosissa on kuukaudesta riippuen 8 tai 9 vuotta. Nämä eivät ole alkulukuja, joten vuonna 2003 kaikkien iät eivät ole voineet olla samanaikaisesti alkulukuja. Lisäksi vuonna 2004 ennen vuonna 2001 syntyneen henkilön syntymäpäivää vuonna 1994 syntyneen henkilön ikä on 9 vuotta. Siis tällöinkään kaikkien iät eivät voi olla samanaikaisesti alkulukuja. Koska 2 on ainoa parillinen alkuluku, niin kaikkien ikien on siis oltava parittomia alkulukuja. Tarkastellaan tilannetta erikseen parittomilla ja parillisilla vuosilla.

Parittomina vuosina vuonna 2001 syntyneen henkilön ikä on pariton vain ennen hänen tammikuussa olevaa syntymäpäiväänsä. Tällöin kuitenkin kesäkuussa 1994 henkilön ikä on parillinen luku. Siis kysytty tilanne ei ole mahdollinen parittomina vuosina.

Tarkastellaan tilannetta vielä parillisina vuosina. Tutkitaan, milloin heinäkuussa 1971 ja huhtikuussa 1970 syntyneiden henkilöiden iät vuosissa voivat olla samanaikaisesti parittomia lukuja. Parillisina vuosina ennen vuonna 1971 syntyneen henkilön syntymäpäivää on hänen ikänsä vuosissa parillinen luku. Kuitenkin huhtikuussa 1970 syntyneen henkilön ikä on parillisina vuosina heinäkuusta joulukuuhun parillinen luku. Siis parillisina vuosina 1971 ja 1970 syntyneiden henkilöiden iät eivät voi olla samanaikaisesti parittomia lukuja. Täten vastaus kysymykseen on, etteivät autossa olevien henkilöiden iät ole koskaan olleet tai tule olemaan samanaikaisesti alkulukuja.