

SATAKUNNAN SEITSEMÄSLUOKKALAISTEN
MATEMATIIKKAKILPAILU 5.–9.3.2018
RATKAISUJA

1. Laske $1 - 20 + 3$.

- a) -16 b) -5 c) 0 d) 16 e) 24

Ratkaisu. Suoraan laskemalla saadaan $1 - 20 + 3 = -16$.

2. Mikä on lukujen $0,25$, 1 ja $\frac{1}{10}$ oikea suuruusjärjestys?

- a) $0,25 < 1 < \frac{1}{10}$ b) $0,25 < \frac{1}{10} < 1$ c) $1 < 0,25 < \frac{1}{10}$
d) $\frac{1}{10} < 1 < 0,25$ e) $\frac{1}{10} < 0,25 < 1$

Ratkaisu. Kirjoitetaan kaikki luvut desimaalilukuina: $1 = 1,00$ ja $\frac{1}{10} = 0,10$. Koska $0,10 < 0,25 < 1,00$, niin **e** on oikea vaihtoehto.

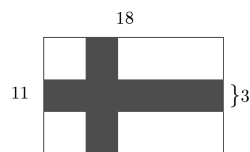
3. Ohjeen mukaan 50 pullan leipomiseen tarvitaan 6 desilitraa maitoa. Kuinka monta litraa maitoa tarvitaan 75 pullan leipomiseen?

- a) $0,9$ b) 1 c) $1,1$ d) $1,2$ e) $1,3$

Ratkaisu. Koska 50 pullan leipomiseen tarvitaan 6dl maitoa, niin 25 pullan leipomiseen tarvitaan $\frac{6}{2}$ dl = 3dl maitoa. Täten 75 pullan leipomiseen tarvitaan $3 \cdot 3$ dl = 9dl maitoa, sillä $75 = 3 \cdot 25$. Tunnetusti on voimassa 9dl = 0,9l.

4. Suomen lippu koostuu valkoisesta pohjasta ja siinä olevasta sinisestä rististä. Lipun korkeus on 11, leveys 18 ja ristin sakaran leveys 3 mittayksikköä, kuten kuvassa näkyy. Mikä on lipussa olevan ristin pinta-ala (mittayksikön neliönä)?

- a) 69 b) 78 c) 81 d) 84 e) 87



Ratkaisu. Pystysuunnassa olevan ristin sakaran pinta-ala on $3 \cdot 11 = 33$ ja leveyssuunnassa olevan $3 \cdot 18 = 54$. Nyt on kuitenkin laskettu kahdesti pinta-ala, jonka koko on $3 \cdot 3 = 9$. Siis ristin pinta-ala on

$$33 + 54 - 9 = 78.$$

5. Tarkastellaan koordinaatistoa. Aluksi ollaan pisteessä $(0, 0)$. Yhdellä askeleella siirrytään joko yhden yksikön oikealle tai yhden yksikön ylöspäin. Esimerkiksi pisteestä $(0, 0)$ voidaan siirtyä joko pisteeseen $(1, 0)$ tai pisteeseen $(0, 1)$. On otettu 2018 askelta. Missä seuraavista pisteistä voidaan olla nyt?

- a) $(0, 0)$ b) $(10, 1000)$ c) $(18, 2000)$ d) $(1010, 1007)$ e) $(1015, 1015)$

Ratkaisu. Koordinaattiesitys ilmaisee, kuinka monta askelta on otettu oikealle ja ylös. Koska on liikuttu 2018 askelta, on x - ja y -koordinaattien summan oltava 2018. Koska $0 + 0 = 0$, $10 + 1000 = 1010$, $18 + 2000 = 2018$, $1010 + 1007 = 2017$ ja $1015 + 1015 = 2030$, niin ainoa mahdollinen piste on $(18, 2000)$.

6. Olkoon A positiivinen kokonaisluku. Kun luku A kerrotaan kahdella, saadaan luku, jonka ensimmäinen numero on 3. Mikä on luvun A ensimmäinen numero?

- a) 1 b) 2 c) 3 d) 6 e) Tällainen tilanne ei ole mahdollinen.

Ratkaisu. Jos luvun A ensimmäinen numero olisi 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 tai 9, niin luvun $2A$ ensimmäinen numero olisi 1, 4, 5, 6, 7, 8 tai 9. Koska kuitenkin tiedetään, että luvun $2A$ ensimmäinen numero on 3, niin luvun A ensimmäinen numero on 1. Tilanne on mahdollinen, sillä esimerkiksi luku $A = 15$ toteuttaa ehdot.

7. Korissa on 10 keltaista, 10 sinistä ja 10 punaista palloa. Korista nostetaan yksi pallo kerrallaan pois, eikä nostettua palloa palauteta enää koriin. Kuinka monta palloa on vähintään nostettava, jotta pois nostettujen pallojen joukossa on varmasti vähintään kaksi samanväristä?

- a) 2 b) 3 c) 4 d) 10 e) 30

Ratkaisu. Koska palloja on kolmea eri väriä, niin neljän nostetun pallon joukossa on oltava vähintään kaksi palloa, jotka ovat samanväriset. Jos taas on nostettu 1, 2 tai 3 palloa, olisi mahdollista, että nostetut pallot olisivat vastaavasti punainen, sininen ja keltainen, joten mitkään kaksi palloa eivät olisi samanvärisiä. Kysytty lukumäärä on siis neljä.

8. Kymmenen oppilasta arvioi maitoliträn hintaa. Heidän arvionsa ovat

84, 85, 87, 90, 92, 94, 96, 99, 101 ja 103

senttiä. Kaupassa käy ilmi, että vähintään puolet oppilaista arvioi hinnan liian korkeaksi, maidon hinta on senteissä jaollinen kolmella ja kaksi oppilasta arvioi maidon hinnan väärin täsmälleen yhdellä sentillä. Kuinka monta senttiä litra maitoa maksoi?

- a) 87 b) 91 c) 93 d) 96 e) 102

Ratkaisu. Koska vähintään puolet arvioi hinnan liian korkeaksi, maitolitra maksoi enintään 93 senttiä. Kolmella jaolliset, lukua 94 pienemmät positiiviset kokonaisluvut ovat

93, 90, 87, 84, ... 3.

Ainoa näistä luvuista, joka toteuttaa sen ehdon, että kaksi oppilasta arvioi hinnan väärin täsmälleen yhdellä sentillä, on 93. Siis maitolitra maksoi 93 senttiä.

9. Olkoon $ABCD$ suorakulmio, piste E sivulla AB , $\angle AED = 70^\circ$ ja $\angle ECD = 50^\circ$. Laske $\angle DEC$.

- a) 50° b) 60° c) 70° d) 80° e) 90°

Ratkaisu. Tapa 1: Nelikulmion kulmien summa on 360° . Näin ollen nelikulmiossa $AECD$ saadaan, että

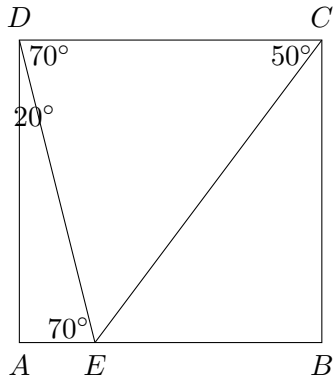
$$\angle DEC = 360^\circ - \angle AED - \angle ECD - \angle CDA - \angle DAE = 360^\circ - 70^\circ - 50^\circ - 90^\circ - 90^\circ = 60^\circ.$$

Tapa 2: Koska kolmion kulmien summa on 180° , niin

$$\angle EDA = 180^\circ - \angle DAE - \angle AED = 180^\circ - 90^\circ - 70^\circ = 20^\circ.$$

Täten $\angle CDE = 90^\circ - \angle EDA = 70^\circ$. Koska kolmion kulmien summa on 180° ja oletuksen mukaan $\angle ECD = 50^\circ$, niin

$$\angle DEC = 180^\circ - \angle CDE - \angle ECD = 180^\circ - 70^\circ - 50^\circ = 60^\circ.$$



10. Tarkastellaan lukuja 0, 1, 2, 3, 4 ja 5. Kuinka monella eri tavalla näiden lukujen joukosta voidaan poistaa kaksi eri lukua, jotta jäljelle jäävien lukujen summan viimeinen numero on 1?

- a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

Ratkaisu. Lasketaan ensin alkuperäisten lukujen summa. Se on

$$0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15.$$

Kun lukuja poistetaan, summan arvo luonnollisesti pienenee. Koska halutaan, että jäljelle jäävien lukujen summan viimeinen numero on 1, niin summan on oltava 1 tai 11. Toisaalta, jos jäljellä jäävässä lukujoukossa on muita lukuja kuin 0 ja 1, niin summa on suurempi kuin yksi. Siis ainoa vaihtoehto on, että summa on 11. Poistettavista luvuista suurin on enintään 4, sillä muuten jäljelle jäävä summa on pienempi kuin 11. Jos suurin poistettava luku on 4, niin toisen poistettavan luvun on oltava 0. Vastaavasti, jos suurin poistettava luku on 3, niin toisen poistettavan luvun on oltava 1. Lukuja 2 ei voida ehtojen mukaan poistaa, eikä luku 1 tai 0 voi olla suurin poistettava luku. Siis kysytyjä mahdollisia eri tapoja on kaksi.

11. Määritellään laskuoperaatio \star seuraavasti: $a \star b = a + 2b$. Mitä on $6 \star 2$?

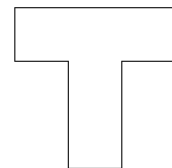
- a) 0 b) 2 c) 4 d) 7 e) 10

Ratkaisu. Huomataan, että

$$6 \star 2 = 6 + 2 \cdot 2 = 10.$$

12. Kuvassa on T-kirjain, jonka leveys on 5 ja korkeus 7. Kaikki kulmat ovat suorita. Määritä ääriviivan pituus.

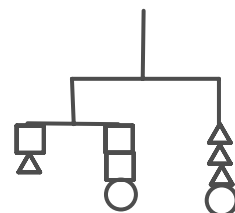
- a) 24 b) 20 c) 17 d) 28
e) Ei pysty määrittämään tehtävässä annetuille tiedoilla.



Ratkaisu. T-kirjaimen ääriviiva on yhtä pitkä kuin yhtä korkean ja leveän suorakulmion, eli $2 \cdot 5 + 2 \cdot 7 = 24$.

13. Tiedetään, että kuvan vaaka on tasapainossa ja sen kokonaismassa on 100 g. Mitkä ovat kuvioiden massat?

- a) Jokaisen kuvion massa on 10 g.
b) Neliön massa on 10 g, ympyrän 15 g ja kolmion 10 g.
c) Neliön massa on 10 g, ympyrän 5 g ja kolmion 15 g.
d) Neliön massa on 20 g, ympyrän 10 g ja kolmion 5 g.
e) Jokaisen kuvion massa on 15 g.



Ratkaisu. Vaa'an vasemmalta puolelta saadaan, että yhden kolmion massa on sama kuin yhden neliön ja yhden ympyrän yhteenlaskettu massa. Näin ollen kolmen kolmion ja yhden ympyrän yhteenlaskettu massa on sama kuin kolmen neliön ja neljän ympyrän yhteenlaskettu massa. Vaa'an oikean puolen mukaan tämä on 50 g. Toisaalta vaa'an vasemman puolen mukaan kahden neliön ja yhden ympyrän yhteenlaskettu massa on 25 g. Yhdistämällä edelliset tiedot saadaan, että neliön ja kolmen ympyrän yhteenlaskettu massa on 25 g. Siis yksi neliö vastaa kahta ympyrää massaltaan. Täten viiden ympyrän yhteenlaskettu massa on 25 g eli ympyrän massa on 5 g ja neliön 10 g. Tästä taas seuraa, että kolmion massa on 15 g.

14. Luku 2018 esitetään 1011 positiivisen kokonaisluvun summana. Mitkä seuraavista voivat olla summassa esiintyvien parittomien lukujen lukumääriä?

- a) 0 ja 1011 b) 2 ja 100 c) 8 ja 500 d) 99 ja 1010 e) Kaikki edelliset

Ratkaisu. Kahden parittoman luvun summa on parillinen, kun taas parittoman ja parillisen luvun summa on pariton. Koska luku 2018 on parillinen, niin parittomia lukuja on oltava summassa parillinen määrä. Jos kaikki 1011 lukua olisivat parillisia, niin niiden summa olisi vähintään $1011 \cdot 2 = 2022$, mikä ei ole mahdollista. Jos taas 1009 luvuista olisi parillisia, niin niiden summa olisi vähintään $1009 \cdot 2 + 1 = 2019 > 2018$. Täten parittomia lukuja täytyy olla vähintään 4. Todetaan vielä, että kaikki lukumäärät 4, 6, ..., 1010 ovat mahdollisia parittomien lukujen lukumääriä. Olkoon parittomia lukuja $2k$ kappaletta, missä $k = 2, 3, \dots, 505$. Nyt parillisia lukuja on oltava $1011 - 2k$ kappaletta. Koska

$$(2k - 1) \cdot 1 + 1 \cdot (2k - 3) + (1011 - 2k) \cdot 2 = 2018,$$

niin luku 2018 saadaan esitettyä 1011 positiivisen kokonaisluvun summana, joista $2k - 1$ on lukuja 1, yksi on luku $2k - 3$ ja $1011 - 2k$ kappaletta on lukuja 2. Tässä summassa $2k$ lukua on parittomia. Näin ollen oikea vaihtoehto on **c**.

15. Tasossa on 15 pistettä. Kaksi eri pistettä joko yhdistetään piirtämällä viiva, tai sitten ei. Näin tehdään kaikille pistepareille. Kuinka monella eri tavalla pisteet voi yhdistää, jos vaaditaan, että kymmenen pisteistä on kukin yhdistetty täsmälleen kahteen muuhun pisteeseen, yksi pisteistä on yhdistetty täsmälleen kolmeen muuhun pisteeseen, ja neljä pisteistä on kukin yhdistetty täsmälleen neljään muuhun pisteeseen?

- a) 0 b) 1 c) 15 d) 63 e) 100

Ratkaisu. Jos piste A on yhdistetty pisteeseen B , niin piste B on yhdistetty pisteeseen A . Viivojen lukumäärä saadaan siis laskemalla kustakin pisteestä lähtevien viivojen lukumäärät yhteen ja jakamalla tulos kahdella. Annetuilla tiedoilla viivojen lukumäärä on $\frac{10 \cdot 2 + 3 + 4 \cdot 4}{2} = \frac{39}{2} = 19,5$. Tämä ei ole mahdollista, sillä viivojen määrän on oltava kokonaisluku. Siis kysytynlainen tilanne ei ole mahdollinen ja tapoja vetää viivat on 0.