Turun alueen seitsemäsluokkalaisten finaali 2018
Ratkaisuita

1. Tässä tehtävässä riittää antaa vastaus ilman perusteluja. Vastaus on positiivinen kokonaisluku.

a) Laske $1-9+10-90+100-900+1000-9000+10000$.

Ratkaisu. Suoraan laskemalla saadaan

$$\begin{aligned}&1-9+10-90+100-900+1000-9000+10000\\&=1+1+10+100+1000\\&=1112.\end{aligned}$$

b) Maanviljelijällä on 256 kg lasti viljaa, jota hän lähtee kuljettamaan läheiseen kaupunkiin. Matkalla hän ylittää neljä siltaa. Jokaista siltaa vartioi peikko, joka vaatii maanviljelijän silloisesta viljalastista neljänneksen ennen kuin hän voi ylittää sillan. Kuinka paljon viljaa maanviljelijällä on jäljellä kun hän saapuu perille?

Ratkaisu. Jokaisessa sillanylityksessä viljelijän lastin suuruus kerrotaan luvulla $(1-\frac{1}{4})=\frac{3}{4}$. Lopullinen viljan määrä on siis $\frac{3^4}{4^4}\cdot 256$ kg. Laskemalla saadaan $3^4=3\cdot3\cdot3\cdot3=9\cdot9=81$ ja samoin $4^4=16\cdot4\cdot4=64\cdot4=256$. Siten viljaa jää $\frac{81}{256}\cdot 256$ kg $=81$ kg.

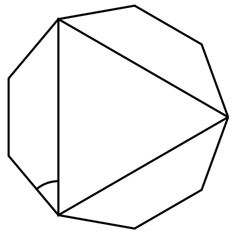
2. Kaksi koiraa syö 11 säkillistä ruokaa vuodessa. Kuinka monta säkillistä ruokaa kolme koiraa syö puolessa vuodessa?

Ratkaisu. Koska kaksi koiraa syö 11 säkillistä ruokaa vuodessa, niin yksi koira syö $\frac{11}{2}$ säkillistä ruokaa vuodessa. Täten kolme koiraa syö $3\cdot\frac{11}{2}=\frac{33}{2}$ säkillistä ruokaa vuodessa. Siis puolessa vuodessa kolme koiraa syö

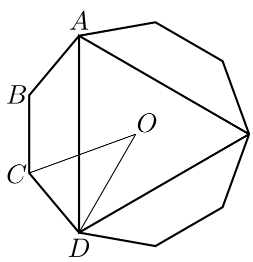
$$\frac{33}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{33}{4}=8{,}25$$

säkillistä ruokaa puolessa vuodessa.

3. Seuraavassa kuvassa on tasasivuinen kolmio ja säännöllinen yhdeksänkulmio. Laske kuvaan merkitty kulma.

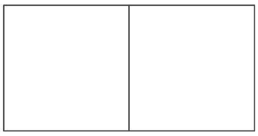


Ratkaisu. Olkoon O kolmion ja yhdeksänkulmion yhteinen keskipiste, ja merkitään kärkiä A, B, C ja D seuraavan kuvan mukaisesti:

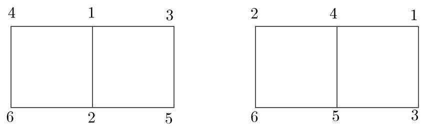


Aloitetaan toteamalla, että $\angle COD=360°/9=40°$ ja kolmio $\triangle OCD$ on tasakylkinen, joten $\angle DCO=\angle ODC$, ja koska kolmion kulmien summa on 180°, on $2\angle DCO=180°-40°=140°$. Nyt $\angle DCB=2\angle DCO=140°$, ja $\angle CBA=\angle DCB=140°$. Nelikulmion $ABCD$ kulmien summa on 360°, ja $\angle ADC=\angle BAD$, joten $2\angle ADC=360°-\angle DCB-\angle CBA=360°-140°-140°=80°$, ja täten kysytyn kulman on oltava $\angle ADC=40°$.

4. Kuvassa on kaksi neliötä, joilla on yksi yhteinen sivu. Neliöiden kärkiin on sijoitettu luvut $1, 2, 3, 4, 5$ ja 6 niin, että kummankin neliön kärjissä olevien lukujen summa on alkuluku. Mitä eri arvoja yhden neliön kärjissä olevien lukujen summa voi saada? (Luku on alkuluku, jos se on lukua 1 suurempi kokonaisluku, joka on jaollinen vain itsellään ja luvulla 1.)



Ratkaisu. Yhden neliön kärjissä olevien lukujen summa on vähintään $1+2+3+4 = 10$ ja enintään $3+4+5+6 = 18$. Näiden lukujen välissä olevat alkuluvut ovat 11, 13 ja 17. Kukin näistä summista on mahdollinen, kuten kuvasta nähdään.



5. Erään matematiikkakilpailun alkukilpailussa on 15 monivalintatehtävää. Kuhunkin tehtävään on täsmälleen yksi oikea vastaus, vastausvaihtoehtoja on viisi, oikeasta vastauksesta saa yhden pisteen ja väärästä sekä tyhjästä vastauksesta nolla pistettä. Alkuperäisten tulosten mukaan oppilaat saivat pisteitä alla olevan taulukon mukaisesti. Alkuperäisten tulosten kirjaamisen jälkeen huomattiin, että yksi tehtävä oli tarkastettu kaikilta oppilailta väärin ja tulokset korjattiin. Mikä on tulosten korjaamisen jälkeen loppukilpailuun kutsuttavien kilpailijoiden pisteraja, kun pisteraja on korkein pistemäärä, jolla loppukilpailuun kutsutaan vähintään 20 kilpailijaa? (Esimerkiksi alla olevan taulukon tilanteessa pisteraja olisi ollut 13.) Huomaa, että vastauksia voi olla useita.

Pistemäärä	Pistemäärän saaneiden oppilaiden määrä
15	1
14	7
13	13
12	21
11	27

Ratkaisu. Tarkastellaan, kuinka moni henkilö saa korjauksen jälkeen minkäkin pistemäärän. Jokaisen oppilaan pistemäärä nousee tai laskee korjatussa tarkistuksessa yhdellä. Lisäksi pistemäärän 15 saaneen oppilaan pistemäärä on tarkistuksen jälkeen 14, koska se ei voi nousta. Havaitaan, että loppukilpailun pisterajan on oltava vähintään 12, sillä vaikka kaikkien taulukoitujen henkilöiden pisteet laskisivat korjauksessa yhdellä, niin vähintään 12 pistettä saaneiden määrä on $1 + 7 + 13 = 21 > 20$. Lisäksi vähintään 13 pistettä saaneiden määrä on $1 + 7 = 8 < 20$. Näin havaitaan, että 12 pistettä on mahdollinen pisteraja loppukilpailuun. Toisaalta loppukilpailun pisteraja ei voi olla 15 pistettä, koska sen saavuttaa enintään 7 oppilasta. Siis loppukilpailun pisteraja on enintään 14 pistettä.

Todetaan vielä, että 13 ja 14 pistettä ovat mahdollisia pisterajoja. Oletetaan, että kaikkien 15 tai 14 pistettä virheellisessä kokeen tarkistuksessa saaneiden pistemäärä laskee ja kaikkien 13 pistettä saaneiden pistemäärä nousee, kun virhe korjataan. Tällöin pistemäärän 14 saavuttaa $1 + 13 < 14$ oppilasta ja pistemäärän 13 vähintään $1 + 13 + 7 = 21 > 20$ oppilasta eli pisteraja on 13. Oletetaan nyt, että virheellisessä tarkistuksessa pistemäärän 14 tai 13 saaneiden pisteet nousevat, kun virhe korjataan. Tällöin pistemäärän 15 on saanut $7 < 20$ kilpailijaa ja pistemäärän 14 on saavuttanut $7 + 14 = 21$ kilpailijaa. Siis pisteraja on 14. Täten mahdolliset pisterajat ovat $12, 13$ ja 14.