Turun seitsemäsluokkalaisten matematiikkakilpailu 5.–9.3.2018
Ratkaisuja

1. Laske $-3 \cdot 14$.

a) 0 **b)** -11 **c)** 11 **d)** -42 **e)** 42

Ratkaisu. Suoraan laskemalla saadaan $-3 \cdot 14 = -42$.

2. Laske $2 \cdot (-|\frac{2}{|-4|}| + \frac{1}{2})$.

a) -2 **b)** -1 **c)** 0 **d)** 1 **e)** 2

Ratkaisu. Suoraan laskemalla saadaan

$$2 \cdot \left(-\left|\frac{2}{|-4|}\right| + \frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \left(-\left|\frac{1}{2}\right| + \frac{1}{2}\right) = 2 \cdot 0 = 0.$$

3. Kahdella eri autolla ajetaan 120 kilometrin matka. Toisella autolla ajetaan keskinopeudella 100km/h ja toisella 80km/h. Matkaan lähdetään molemmilla autoilla samanaikaisesti, mutta toisella autolla pysähdytään kesken matkan ja toisella ei. Kuinka pitkä pysähdys on, kun perille saavutaan samanaikaisesti molemmilla autoilla?

a) 5 min **b)** 10 min **c)** 12 min **d)** 15 min **e)** 18 min

Ratkaisu. Hitaammin ajettavalta autolta kuluu matkaan 1h 30 min ja nopeammin ajettavalta ilman pysähdystä 1h 12 min. Näin ollen pysähdys on 18 minuuttia pitkä.

4. Olkoon V_s suorakulmaisen $1 \times 2 \times 3$-särmiön tilavuus, ja olkoon V_k $1 \times 1 \times 1$-kuution tilavuus. Mitä on $\dfrac{V_s}{V_k}$?

a) 1 **b)** 6 **c)** 18 **d)** 36 **e)** 216

Ratkaisu. Suoraan laskemalla saadaan, että $V_s = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ ja $V_k = 1^3 = 1$. Siis $\frac{V_s}{V_k} = \frac{6}{1} = 6$.

5. Kymmenen oppilasta arvioi maitolitran hintaa. Heidän arvionsa ovat

$$84, 85, 87, 90, 92, 94, 96, 99, 101 \text{ ja } 103$$

senttiä. Kaupassa käy ilmi, että vähintään puolet oppilaista arvioi hinnan liian korkeaksi, maidon hinta on senteissä jaollinen kolmella ja kaksi oppilasta arvioi maidon hinnan väärin täsmälleen yhdellä sentillä. Kuinka monta senttiä litra maitoa maksoi?

a) 87 **b)** 91 **c)** 93 **d)** 96 **e)** 102

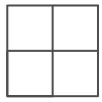
Ratkaisu. Koska vähintään puolet arvioi hinnan liian korkeaksi, maitolitra maksoi enintään 93 senttiä. Kolmella jaolliset, lukua 94 pienemmät positiiviset kokonaisluvut ovat

$$93, \quad 90, \quad 87, \quad 84, \quad \ldots \quad 3.$$

Ainoa näistä luvuista, joka toteuttaa sen ehdon, että kaksi oppilasta arvioi hinnan väärin täsmälleen yhdellä sentillä, on 93. Siis maitolitra maksoi 93 senttiä.

6. Kuinka monella eri tavalla kuvio voidaan värittää käyttämällä mustaa ja valkoista maalia, kun halutaan, että kuviossa on yhtä paljon mustaa ja valkoista maalia sekä jokainen pieni neliö on väritetty kokonaan yhdellä värillä?

a) 1 **b)** 3 **c)** 4 **d)** 6 **e)** 8



Ratkaisu. Koska värityksessä on oltava yhtä paljon punaista ja mustaa, niin täsmälleen kaksi neliötä pitää maalata mustaksi. Kun mustat neliöt on valittu, määräytyvät valkoiset neliöt yksikäsitteisesti. Siis on laskettava, kuinka monella eri tavalla mustat neliöt voidaan valita. Jos toinen mustista neliöistä on vasemmassa yläkulmassa, niin toiselle neliölle on kolme eri vaihtoehtoa. Jos taas kumpikaan neliöistä ei ole vasemmassa yläkulmassa ja toinen on oikeassa yläkulmassa, niin väritysvaihtoehtoja on kaksi. Jos taas kumpikaan väritetyistä ruuduista ei ole ylhäällä, niin on tasan yksi mahdollinen tapa valita kaksi väritettävää ruutua –ne ovat alareunan ruudut. Siis erilaisia väritystapoja on $3 + 2 + 1 = 6$.

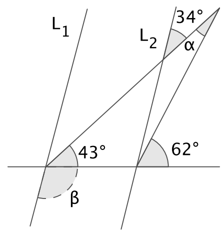
7. Olkoot luvut x ja y murtolukuja. Mitä voidaan (varmasti) sanoa luvusta $x + y$?

a) Se on kokonaisluku. **b)** Se on korkeintaan 1. **c)** Se on negatiivinen.
d) Se toteuttaa kaikki edelliset ehdot. **e)** Mitään edellisistä ei voi sanoa varmasti.

Ratkaisu. Olkoon $x = 0$ ja $y = \frac{3}{2}$. Nyt luvut x ja y toteuttavat tehtävän oletuksen sekä $x + y = \frac{3}{2}$. Täten vaihtoehdot a,b,c,d eivät ole tosia. Oikea vaihtoehto on siis **e**.

8. Suorat L_1 ja L_2 ovat yhdensuuntaiset. Laske kulmat α ja β.

a) $\alpha = 19°$ ja $\beta = 103°$ **b)** $\alpha = 34°$ ja $\beta = 103°$
c) $\alpha = 19°$ ja $\beta = 118°$ **d)** $\alpha = 34°$ ja $\beta = 118°$
e) $\alpha = 34°$ ja $\beta = 62°$



Ratkaisu. Koska kolmion kulmien summa on 180° ja vieruskulman suuruus saadaan vähentämällä 180°:sta kulma, niin

$$\alpha = 180° - 43° - (180° - 62°) = 19°.$$

Koska suorat L_1 ja L_2 ovat yhdensuuntaiset, niin

$$\beta = 180° - (43° + 34°) = 103°.$$

9. Olkoon neljän peräkkäisen kokonaisluvun summa S. Mikä on luvun S jakojäännös neljällä jaettaessa?

a) 0 **b)** 1 **c)** 2 **d)** 3 **e)** Tulos riippuu valituista neljästä luvusta

Ratkaisu. Peräkkäiset kokonaisluvut voidaan kirjoittaa muodossa $n, n+1, n+2, n+3$, missä n on kokonaisluku. Nyt

$$S = n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) = 4n + 6.$$

Voidaan edelleen kirjoittaa $4n + 6 = 4(n + 1) + 2$. Koska $4(n + 1)$ on jaollinen luvulla neljä, niin kysytty jakojäännös on 2.

10. Kuinka monella kokonaisluvulla x pätee $2x^{2018} = 100000000001$? (Merkinnällä x^{2018} tarkoitetaan lukua $x \cdot x \cdot \ldots \cdot x$, missä x esiintyy 2018 kertaa.)

a) 0 **b)** 1 **c)** 2 **d)** 100 **e)** äärettömän monella

Ratkaisu. Luku $2x^{2018}$ on parillinen luku. Sen sijaan 100000000001 on pariton luku, koska sen viimeinen numero on 1. Täten yhdelläkään kokonaisluvulla x ei voi päteä $2x^{2018} = 100000000001$.

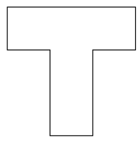
11. Tarkastellaan kuvanmukaista taulukkoa. Mikä on taulukossa olevien lukujen tulo? (Merkinnällä a^n tarkoitetaan tuloa $a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$, missä a esiintyy n kertaa.)

1	2	3	4	5
2	4	6	8	10
3	6	9	12	15
4	8	12	16	20
5	10	15	20	25

a) $2^5 \cdot 3^5 \cdot 5^5$ **b)** $2^{10} \cdot 3^5 \cdot 5^5$ **c)** $2^{15} \cdot 3^5 \cdot 5^5$
d) $2^{10} \cdot 3^{15} \cdot 5^5$ **e)** $2^{30} \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$

Ratkaisu. Taulukon alkio saadaan kertomalla aina vasemman puoleisimman sarakkeen ja ylimmän rivin luku keskenään. Esimerkiksi oikeassa alakulmassa oleva luku 25 on $5 \cdot 5$. Kullakin luvulla $1, 2, \ldots, 5$ kerrotaan siis $5 + 5 = 10$ kertaa. Näin ollen tulo on siis $1 \cdot 2^{10} \cdot 3^{10} \cdot 4^{10} \cdot 5^{10}$. Koska $4 = 2^2$, niin tämä lauseke voidaan sieventää muotoon $2^{10} \cdot 3^{10} \cdot 2^{20} \cdot 5^{10} = 2^{30} \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$.

12. Kuvassa on T-kirjain, jonka leveys on 5 ja korkeus 7. Kaikki kulmat ovat suoria. Määritä ääriviivan pituus.



a) 24 **b)** 20 **c)** 17 **d)** 28
e) Ei pysty määrittämään tehtävässä annetuille tiedoilla.

Ratkaisu. T-kirjaimen ääriviiva on yhtä pitkä kuin yhtä korkean ja leveän suorakulmion, eli $2 \cdot 5 + 2 \cdot 7 = 24$.

13. Muodostetaan luvuista $-1, 0, 1, 2$ kaikki mahdolliset parit, joissa luvut ovat erisuuret. Lasketaan kunkin parin lukujen tulo. Kuinka suuressa osuudessa näitä tuloja tulon arvo on nolla?

a) $\frac{1}{6}$ **b)** $\frac{1}{5}$ **c)** $\frac{1}{4}$ **d)** $\frac{1}{3}$ **e)** $\frac{1}{2}$

Ratkaisu. Tapa 1: Tulo on nolla täsmälleen silloin, kun vähintään yksi tulontekijöistä on nolla. Yhteensä muodostettavia tuloja on $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$, sillä jokaista neljästä luvusta kohti on kolme lukua, jotka voivat olla sen pareja ja toisaalta kukin tulo lasketaan tällä tavalla kahdesti. Näistä pareista kolmessa esiintyy luku 0. Täten kysytty osuus on $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Tapa 2: Ratkaistaan tehtävä kirjoittamalla kaikki mahdolliset tulot. Jos toinen valittavista luvuista on -1, niin toinen luku on $0, 1$ tai 2. Näistä saadaan tulot $0, -1$ ja -2 vastaavasti. Jos toinen valittavista luvuista on 0, eikä kumpikaan -1 (koska tämä tapaus on jo tarkasteltu), niin toinen luvuista on 1 tai 2. Laskettavat tulot ovat 0 ja 0. Lisäksi, jos toinen valituista luvuista on 1, eikä kumpikaan luvuista ole -1 tai 0, niin toinen luvuista on 2. Tällöin tulo on 2. Siis kaiken kaikkiaan eri tuloja on kuusi kappaletta ja niistä kolmessa tulo on nolla. Täten kysytty osuus on $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

14. Määritellään laskuoperaatio $\star$ seuraavasti: $a \star b = a + 2b$. Jos a on mikä tahansa annettu luku, niin onko aina olemassa sellainen luku b, että $a \star b = 0$?

a) Ei, sellainen on olemassa vain, jos $a = 0$. **b)** Kyllä, mikä tahansa b käy.
c) Ei, sellaista ei ole koskaan olemassa.
d) Sellainen on olemassa vain, jos $a = 0$ tai $a = 1$. **e)** On, $b = -a/2$ käy.

Ratkaisu. Huomataan, että

$$a \star b = 0$$

jos ja vain jos

$$a + 2b = 0,$$

eli $b = -a/2$.

15. Kuinka monella tavalla luvut $1, 2, \ldots, 9$ voidaan kirjoittaa peräkkäin taululle niin, että kahden peräkkäisen luvun summa on vähintään 10 ja kahden reunimmaisen luvun (oikean ja vasemman reunan) summa on vähintään 11?

a) 0 **b)** 1 **c)** 5 **d)** 10 **e)** 100

Ratkaisu. Koska kahden peräkkäisen luvun summa on vähintään 10 ja reunimmaisten lukujen summa vähintään 11, niin taululla olevien lukujen summa kerrottuna kahdella on vähintään

$$8 \cdot 10 + 11 = 91.$$

Toisaalta kaikkien taululla olevien lukujen summa kerrottuna kahdella on

$$(1+9)+(2+8)+(3+7)+(4+6)+(5+5)+(6+4)+(7+3)+(8+2)+(9+1) = 9 \cdot 10 = 90.$$

Mutta nyt pitäisi olla $91 \leq 90$, mikä on mahdotonta. Siis ei ole yhtään mahdollista tapaa sijoittaa lukuja taululle halutulla tavalla.