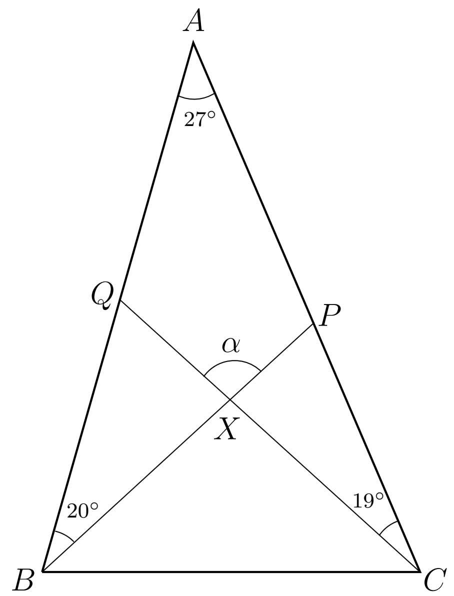
Seitsemäsluokkalaisten matematiikkakilpailun finaali 24.4.2019 Ratkaisuita

1. Mikä on luvun $2015 \cdot 2016 \cdot 2017 \cdot 2018 \cdot 2019$ viimeinen numero?

Ratkaisu. Tapa 1: Koska 2015 on jaollinen luvulla viisi, niin tarkasteltava tulo on myös jaollinen luvulla viisi ja täten sen viimeisen numeron on oltava 0 tai 5. Toisaalta 2016 on parillinen luku, joten myös viimeisen numeron on oltava parillinen. Siis viimeinen numero on 0.

Tapa 2: Viimeisen numeron löytämiseksi riittää tarkastella tulon viimeisiä numeroita eli tuloa $5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9$. Koska $5 \cdot 6 = 30$, niin tarkasteltava tulo on kymmenellä jaollinen ja täten sen viimeinen numero on 0.

2. Kolmiossa $\triangle ABC$ on $\angle BAC = 27°$. Sen sivulta AC on valittu piste P niin, että $\angle PBA = 20°$, ja sen sivulta AB on valittu piste Q niin, että $\angle ACQ = 19°$. Janat BP ja CQ leikkaavat toisensa pisteessä X. Kuinka suuri on kuvaan merkitty kulma α, eli kulma $\angle PXQ$?



Ratkaisu. Koska kolmion kulmien summa on aina 180°, voimme laskea kolmioita $\triangle AQC$ ja $\triangle APB$ tarkastelemalla, että

$$\angle CQA = 180° - 27° - 19° = 134°,$$

ja

$$\angle APB = 180° - 27° - 20° = 133°.$$

Vaikkapa jakamalla nelikulmio $AQXP$ lävistäjällä kahdeksi kolmioksi näkee, että nelikulmion $AQXP$ kulmien summan on oltava 360°. Siten

$$\alpha = 360° - 27° - 133° - 134° = 66°.$$

3. Matemaatikolla on eräällä hyllyllä kolme suomen-, neljä englannin- ja kaksi ruotsinkielistä matematiikan kirjaa. Kuinka monella tapaa hän voi järjestää ne hyllylle, kun hän haluaa pitää samankieliset kirjat peräkkäin?

Ratkaisu. *Kirjat voidaan järjestää* 1728 *eri tavalla.*
Kirjoja on yhteensä yhdeksän. Koska kaikki samaa kieltä olevat kirjat halutaan pitää peräkkäin, niin kirjojen lukumäärien takia ensimmäinen englanninkielinen kirja voi olla ensimmäisenä, kolmantena, neljäntenä tai kuudentena. Jos ensimmäinen englanninkielinen kirja on kolmantena, niin kahden edeltävän kirjan on oltava ruotsinkielisiä. Vastaavasti, jos ensimmäinen englanninkielinen kirja on neljäntenä, niin kolme ensimmäistä kirjaa ovat suomenkielisiä. Ruotsinkieliset kirjat voidaan järjestää $2 \cdot 1$ eri tavalla, suomenkieliset $3 \cdot 2 \cdot 1$ ja englanninkieliset $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ eri tavalla. Ensimmäisen englanninkielisen kirjan ollessa kolmantena tai neljäntenä kirjat voidaan siis järjestää yhteensä

$$1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2 = 288 + 288 = 576$$

eri tavalla.

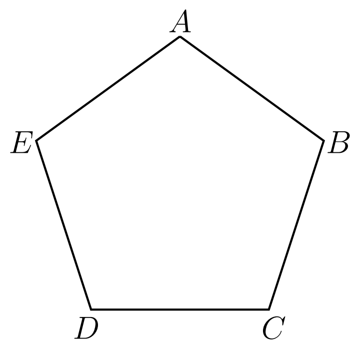
Kun ensimmäinen englanninkielinen kirja on ensimmäisenä tai kuudentena, voi ruotsin- ja suomenkielisten kirjojen keskinäinen järjestys olla kummin päin tahansa. Siis vastaavilla päättelyillä kuin edellisessä kappaleessa saadaan, että näissä tapauksissa kirjat voidaan järjestää yhteensä $4 \cdot 288 = 1152$ eri tavalla. Kirjat voidaan siis järjestää yhteensä $576 + 1152 = 1728$ eri tavalla.

Tapa 2: Kielet voidaan ensin järjestää $3! = 6$ eri tavalla. Suomenkieliset voidaan järjestää keskenään kuudella, englanninkieliset $4! = 24$ tavalla ja ruotsinkieliset kahdella tavalla.Yhteensä siis

$$6 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 24 = 1728.$$

4. Osoita, että on mahdollista, että viiden henkilön joukossa ei ole yhtään sellaista kolmen henkilön joukkoa että kaikki kolme henkilöä tuntisivat toisensa tai heistä kukaan ei tuntisi kumpaakaan toisista. (Tunteminen on kaksisuuntaista, eli jos Martti tuntee Saulin, niin Sauli tuntee Martin.)

Ratkaisu. Tarkastellaan tilannetta, jossa viidestä ihmisestä A, B, C, D ja E henkilö A tuntee täsmälleen henkilöt E ja B, henkilö B tuntee täsmälleen henkilöt A ja C, henkilö C tuntee täsmälleen henkilöt B ja D, henkilö D tuntee täsmälleen henkilöt C ja E, ja henkilö E tuntee täsmälleen henkilöt D ja A. Voimme havainnollistaa tilannetta kuvalla, jossa henkilöt ovat pisteitä, ja kaksi henkilöä tuntevat toisensa täsmälleen silloin, kun heidän välilleen on piirretty viiva. Tilannetta havainnollistava kuva näyttää tältä:



Nyt näkee helposti, että ketkään kolme näistä viidestä henkilöstä eivät kaikki tunne toisiaan, eivätkä ole toisilleen täysin tuntemattomia. Nimittäin, keistä tahansa kolmesta henkilöstä joidenkin kahden on oltava viisikulmion kehällä vierekkäin ja siten tunnettava toisensa, ja toisaalta, jos X, Y ja Z ovat kolme henkilöä niin, että Y tuntee molemmat henkilöistä X ja Z, niin silloin henkilöiden X ja Z on oltava henkilön Y naapureita viisikulmion kehällä, ja silloin X ja Z eivät voi tuntea toisiaan.

5. Mikä luvuista

$$2^{(3^4)}, \qquad 2^{(4^3)}, \qquad 3^{(2^4)}, \qquad 3^{(4^2)}, \qquad 4^{(2^3)}, \qquad \text{ja} \qquad 4^{(3^2)}$$

on suurin? [Kun x on luku ja k on positiivinen kokonaisluku, niin x^k tarkoittaa tuloa $x \cdot x \cdot x \cdot \ldots \cdot x$, missä x esiintyy k kertaa. Esimerkiksi, $7^5 = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$ ja $2^{(2^3)} = 2^{2\cdot 2\cdot 2} = 2^8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 256$.]

Ratkaisu. Annetut luvun kolme potenssit ovat itse asiassa yhtä suuria keskenään, sillä

$$3^{(2^4)} = 3^{16} = 3^{(4^2)}.$$

Annetut luvun kaksi potenssit voi kirjoittaa yksinkertaisemmin, sillä

$$2^{(3^4)} = 2^{3\cdot 3\cdot 3\cdot 3} = 2^{9\cdot 9} = 2^{81},$$

ja

$$2^{(4^3)} = 2^{4\cdot 4\cdot 4} = 2^{16\cdot 4} = 2^{64}.$$

Luonnollisesti $2^{81} > 2^{64}$. Luvun 4 potenssit voi kirjoittaa luvun 2 potensseina, sillä

$$4^{(2^3)} = 4^{2\cdot 2\cdot 2} = 4^8 = (2\cdot 2)^8 = \underbrace{(2\cdot 2)\cdot(2\cdot 2)\cdot \ldots \cdot (2\cdot 2)}_{\text{tulo } 2\cdot 2 \text{ esiintyy tässä 8 kertaa}}$$
$$= \underbrace{2\cdot 2\cdot \ldots \cdot 2}_{\text{tekijä 2 esiintyy tässä 16 kertaa}} = 2^{16},$$

ja samassa hengessä

$$4^{(3^2)} = 4^9 = 2^9 \cdot 2^9 = 2^{18}.$$

Luonnollisesti $2^{81} > 2^{18} > 2^{16}$. Riittää siis enää verrata potensseja 2^{81} ja 3^{16} toisiinsa. Mutta osoittautuu, että näistä edellinen on valtavasti jälkimmäistä isompi, ja onkin

$$2^{81} > 2^{80} = 2^{40} \cdot 2^{40} = (2\cdot 2)^{40} = 4^{40} > 3^{40} > 3^{16}.$$

Siispä potenssi $2^{(3^4)}$ on annetuista kuudesta luvusta isoin.