

HELSINGIN SEITSEMÄSLUOKKALAISTEN
MATEMATIIKKAKILPAILU 4.–8.3.2019
RATKAISUITA

1. Laske $23 + 57 + 89$.

- a) 147 b) 169 c) 172 d) 181 e) 195

Ratkaisu. Voimme laskea $23 + 57 + 89 = 80 + 89 = 169$.

2. Laske $24 \cdot 15 - 25 \cdot 18$.

- a) -84 b) -86 c) -88 d) -90 e) -92

Ratkaisu. Voimme laskea $24 \cdot 15 - 25 \cdot 18 = 360 - 450 = -90$.

3. Lento Helsingistä Pekingiin kestää 7 tuntia ja 35 minuuttia. Pekingissä kellonaika on viisi tuntia edellä Suomen aikaa. Jos lento lähtee Helsingistä klo. 18:20, mitä kello on Pekingissä, kun lento saapuu sinne?

- a) 05:45 b) 06:55 c) 15:45 d) 18:55 e) 20:55

Ratkaisu. Koska lento kestää 7 tuntia ja 35 minuuttia, niin se saapuu Pekingiin, kun kello on Suomessa 01:55. Tällöin Pekingissä kello on 06:55.

4. Desilitra vehnä jauhoja painaa n. 65 g ja desilitra kaurahiutaleita n. 35 g. Omenapaistoksen taikinaan käsketään pistämään kaurahiutaleita puolet vehnä jauhojen määrästä desilitroissa mitattuna. Jos vehnä jauhoja on 520 g, niin kuinka paljon on kaurahiutaleita?

- a) 100 g b) 140 g c) 220 g d) 740 g e) 320 g

Ratkaisu. Vehnä jauhoja tulee 520 g. Tämä vastaa $\frac{520}{65}$ desilitraa vehnä jauhoja, eli $\frac{520}{65 \cdot 2} = 4$ desilitraa kaurahiutaleita. Kaurahiutaleita tulee siis 140 g.

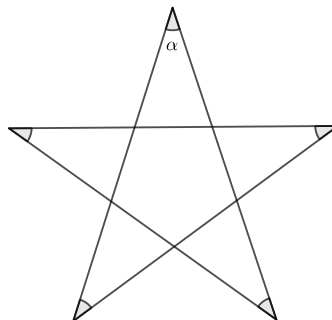
5. Suorakulmaisen särmiön muotoisen uima-altaan syvyys on 2,5 metriä, pituus 25 metriä ja leveys 10 metriä. Sitä täytetään vedellä 2 metrin korkeudelle pumppausnopeudella 100 litraa minuutissa. Kuinka monta minuuttia uima-altaan täyttö kestää?

- a) 5 b) 250 c) 500 d) 2500 e) 5000

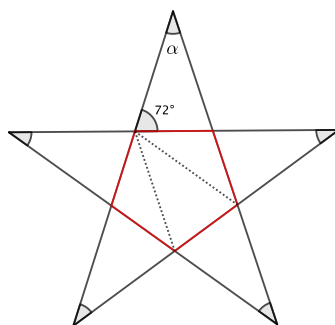
Ratkaisu. Uima-altaaseen tarvitaan $2 \text{ m} \cdot 25 \text{ m} \cdot 10 \text{ m} = 500 \text{ m}^3$ eli 500000 litraa vettä. Koska uima-altaaseen pumpataan 100 litraa minuutissa, niin sen täyttö kestää $\frac{500000}{100} = 5000$ minuuttia.

6. Kaikki tähtikuvioon merkityt kulmat ovat kulman α kokoisia ja kuviossa esiintyvät sivujen pituudet ovat yhtä pitkiä. Kuinka suuri kulma α on?

- a) 34° b) 35° c) 30° d) 45° e) 36°



Ratkaisu. Koska kaikki merkityt kulmat ovat yhtä suuria ja sivut yhtä pitkiä, niin tähtikuvion sisällä on säännöllinen viisikulmio, jonka sivut on kuvassa merkitty punaisella. Havaitaan, että säännöllinen viisikulmio voidaan jakaa kolmeen kolmioon (ks. kuvassa katkoviivalla olevat janat) ja tunnetusti kunkin kolmion kulmien summa on 180° . Siis viisikulmion kulmien summa on $3 \cdot 180^\circ = 540^\circ$. Täten viisikulmion yksi kulma on $\frac{540^\circ}{5} = 108^\circ$. Täten kukin viisikulmion sakara muodostuu kolmiosta, jonka yhden kulman koko on α ja kahden muun koot ovat viisikulmion kulmien vieruskulmina $180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$. Saadaan $\alpha = 180^\circ - 72^\circ - 72^\circ = 36^\circ$.



7. Mikä on luvun $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15 \cdot 17 \cdot 19$ viimeinen numero?

- a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 5

Ratkaisu. Koska tulo on jaollinen luvulla viisi, sen viimeisen numeron on oltava 0 tai 5. Toisaalta tulon täytyy parittomien lukujen tulona oltava pariton. Siis viimeinen numero on 5.

8. Laske taulukossa olevien lukujen summa.

10	20	30	40	50
20	40	60	80	100
30	60	90	120	150
40	80	120	160	200
50	100	150	200	250

- a) 500 b) 1000 c) 2250 d) 3560 e) 4550

Ratkaisu. Havaitaan, että taulukon toinen rivi on ensimmäinen kerrottuna kahdella, kolmas ensimmäinen kerrottuna kolmella ja niin edelleen. Siispä taulukossa olevien lukujen summa on

$$(1 + 2 + 3 + 4 + 5) \cdot (10 + 20 + 30 + 40 + 50) = 15 \cdot 150 = 2250.$$

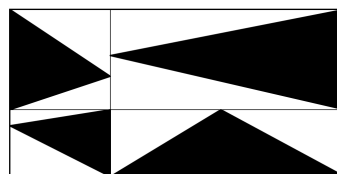
9. Kolmen luvun keskiarvo on 10 ja kahden muun luvun keskiarvo on 5. Mikä on näiden kaikkien viiden luvun keskiarvo?

- a) 3 b) 5 c) 6,5 d) 7,5 e) 8

Ratkaisu. Koska kolmen luvun keskiarvo on 10, niin niiden summa on 30. Vastaavasti kahden muun luvun summa on 10. Siis kaikkien viiden luvun summa on $30 + 10 = 40$ eli niiden keskiarvo on $\frac{40}{5} = 8$.

10. Suorakulmion ala on 1 ja se on jaettu neljään osaan sivujen suuntaisilla janoilla. Laske mustaksi väritetyn osan ala.

- a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{3}{8}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{7}{16}$ e) $\frac{1}{2}$



Ratkaisu. Kolmion ala on kannan ja korkeuden tulo jaettuna kahdella. Koska jokaisen mustan kolmion kanta on yhden pienen suorakulmion sivu ja korkeus suorakulmion toinen sivu, on jokaisen kolmion ala puolet sen pienen suorakulmion alasta. Yhteensä ala on siis puolet suuren suorakulmion alasta eli $\frac{1}{2}$.

11. Kuinka monta sellaista kahden kokonaisluvun paria on, jossa lukujen summa on 2019 ja lukujen tulo on 2019?

- a) 0 b) 1 c) 10 d) 100 e) yli 1000

Ratkaisu. Luku 2019 on pariton kokonaisluku, joten sillä ei ole parillisia tekijöitä. Toisaalta, jotta se voidaan esittää kahden kokonaisluvun summana, on toisen luvusta oltava parillinen. Siis ei ole olemassa yhtään kahden kokonaisluvun paria, jossa lukujen summa olisi 2019 ja tulo olisi myös 2019.

12. Laske $\frac{2}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{6}{8} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{10}{6} \cdot \frac{12}{5} \cdot \frac{14}{4} \cdot \frac{16}{3} \cdot \frac{18}{2} \cdot \frac{20}{1}$.

- a) $\frac{142}{13}$ b) 512 c) 743 d) 1024 e) $\frac{32468}{7}$

Ratkaisu. Voimme sieventää tuloa mukavasti näin:

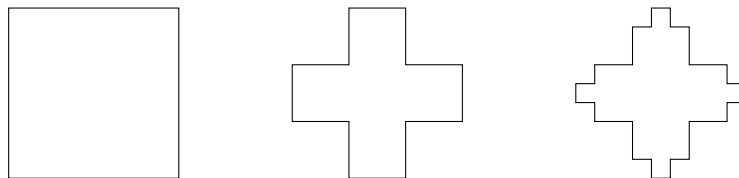
$$\begin{aligned} & \frac{2}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{6}{8} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{10}{6} \cdot \frac{12}{5} \cdot \frac{14}{4} \cdot \frac{16}{3} \cdot \frac{18}{2} \cdot \frac{20}{1} \\ &= \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14 \cdot 16 \cdot 18 \cdot 20}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10} \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 1024. \end{aligned}$$

13. Erään vuoden maaliskuussa on täsmälleen neljä maanantaita ja neljä perjantaita. Mikä viikonpäivä on maaliskuun 31. päivä?

- a) Maanantai b) Tiistai c) Keskiviikko d) Torstai e) Perjantai

Ratkaisu. Maaliskuussa on 31 päivää. Koska viikossa on seitsemän päivää ja $31 = 4 \cdot 7 + 3$, niin maaliskuun 31. päivän viikonpäivää ja sitä edeltävää kahta viikonpäivää on täytynyt olla kuussa tasan viisi kertaa. Koska maaliskuussa on neljä maanantaita ja neljä perjantaita, niin 31. päivän on oltava torstai.

14. Neliön muotoisesta paperista leikataan ensimmäisellä kierroksella kulmista neliöt pois, jolloin uudessa monikulmiossa on kuvanmukaisesti 12 kulmaa. Toisella kierroksella uudesta monikulmiosta leikataan 90° kulmista neliöt pois, jolloin uudessa monikulmiossa on 28 kulmaa. Jokaisella kierroksella monikulmion 90° kulmista siis leikataan neliöt pois. Montako kulmaa (sekä 90° että 270° kulmaa) monikulmiossa on viidennen leikkauskierroksen jälkeen?



- a) 68 b) 100 c) 124 d) 128 e) 252

Ratkaisu. Huomataan, että jokaisella leikkauskierroksella 90° kulma korvautuu kahdella 90° kulmalla ja yhdellä 270° kulmalla. Lisäksi 270° kulmia ei leikata. Täten 90° kulmien määrän kehitys on siis

$$4 \rightarrow 8 \rightarrow 16 \rightarrow 32 \rightarrow 64 \rightarrow 128.$$

Edellisen kierroksen 90° kulmat puolestaan tuottavat aina seuraavalla kierroksella 270° kulmia, ja 270° kulmat eivät koskaan häviä, joten 270° kulmia on

$$4 + 8 + 16 + 32 + 64 = 124.$$

Yhteensä siis kulmia on

$$128 + 124 = 252.$$

15. Kuinka monella eri tavalla voi valita positiiviset kokonaisluvut x , y , z ja w niin, että

$$x^2 + y^2 = 2(z^2 + w^2)?$$

- a) 1 b) 18 c) 63 d) 100 e) yli 100

Ratkaisu. Havaitaan, että esimerkiksi $(x, y, z, w) = (4, 2, 3, 1)$ on yksi ratkaisu. Nyt kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla t pätee, että $(x, y, z, w) = (4t, 2t, 3t, t)$ on tarkasteltavan yhtälön ratkaisu. Siis oikea vaihtoehto on **e**.