Matematiktävling för elever i sjunde årskursen i Uleåborgs region 17.–21.2.2020
Ratkaisuja

1. Beräkna $100 - (30 - 5) - 25$.

a) 40 **b)** 50 **c)** 65 **d)** 90 **e)** 100

Lösning. b) 50:

$$100 - (30 - 5) - 25 = 100 - 25 - 25 = 75 - 25 = 50$$

2. Beräkna $1 - 20 + 2 - 19 + 3 - 18 + \ldots + 19 - 2 + 20 - 1$.

a) -15 **b)** -1 **c)** 0 **d)** 15 **e)** 420

Lösning. c) 0: Genom att ordna om termerna får vi

$$\begin{aligned}&1 - 20 + 2 - 19 + 3 - 18 + \ldots + 19 - 2 + 20 - 1\\ =&(1 - 1) + (2 - 2) + (3 - 3) + \ldots + (19 - 19) + (20 - 20) = 0\end{aligned}$$

3. Tal väljs slumpmässigt från intervallet 1–20. Hur många tal måste väljas, så att det med säkerhet väljs åtminstone ett tal som är delbart med 3?

a) 3 **b)** 6 **c)** 10 **d)** 15 **e)** 20

Lösning. a) 15: Det finns 6 tal i intervallet 1–20 som är delbara med 3 samt 14 tal som inte är det. Därför måste vi välja minst 15 tal om vi vill vara säkra på att minst ett av dem är delbart med 3.

4. Till ett pajrecept behövs 200g gräddfil och 3dl bär. En paj räcker till 12 bitar. Ett fotbollsförbund ordnar en pajförsäljning, dit man vill baka möjligast många bärpajer. För pajerna har det skaffats 2,4kg gräddfil och 10 liter bär. Hur många bitar bärpaj kan de sälja som mest? (Observera att ifall gräddfilen eller bären tar slut, kan man inte baka mera.)

a) 144 **b)** 100 **c)** 12 **d)** 360 **e)** 400.

Lösning. a) 144: Gräddfilen skulle räcka till 12 satser paj, bären till över 30, därför tar gräddfilen slut först. Fotbollslaget kan därför sälja som mest $12 \cdot 12 = 144$ bitar paj.

5. Vilket av följande tal är summan av fyra på varandra följande positiva heltal?

a) 20 **b)** 21 **c)** 22 **d)** 23 **e)** 24

Lösning. c) 22: Summan av fyra på varandra följande positiva heltal kan skrivas som

$$n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) = 4n + 6.$$

Då $n = 4$ får vi $4 \cdot 4 + 6 = 22$.

6. Om $a \star b = a \cdot b + 3$, vad är då $3 \star 4$?

a) 7 **b)** 10 **c)** 12 **d)** 15 **e)** 21

Lösning. d) 15: $3 \star 4 = 3 \cdot 4 + 3 = 15$.

7. Vi vet att det finns sammanlagt 12 bollar i den röda och den blåa korgen, sammanlagt 15 bollar i den blåa och den gula korgen samt sammanlagt 7 bollar i den gula och den röda korgen. Hur många bollar innehåller den röda korgen?

a) 0 **b)** 2 **c)** 4 **d)** 5 **e)** Uppgiften kan inte lösas med den givna informationen

Lösning. **b)** 2: Då det finns 12 bollar i den blåa och den röda korgen och 15 bollar i den blåa och den gula korgen, finns det 3 bollar mera i den gula korgen än i den röda. Då det finns 7 bollar i den röda och den gula korgen, måste den röda ha 2 bollar (den blåa har 10 och den gula 5).

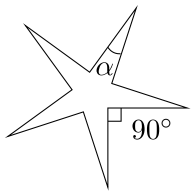
8. Hur många positiva heltal m uppfyller olikheten

$$m \cdot (7 - m) > 0?$$

a) 0 **b)** 6 **c)** 7 **d)** 8 **e)** oändligt många.

Lösning. **b)** 6: Då m är positiv, är även $m(7 - m)$ positiv, endast om $7 - m > 0$ alltså då $7 > m$. Detta uppfylls med $m = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

9. Hur stor är vinkeln α (stjärnans spets), då alla spetsars vinklar är lika stora och då vinklarna mellan spetsarna alla är 90°?



a) 9° **b)** 18° **c)** 27° **d)** 36° **e)** 72°

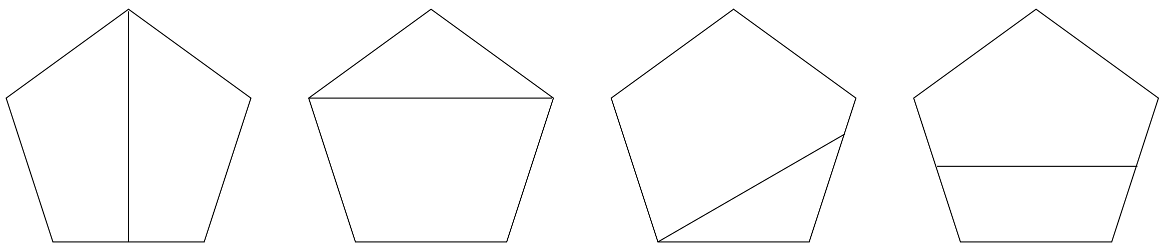
Lösning. **b)** 18°: Stjärnan på bilden är en tiohörning, så dess inre vinklars summa är $8 \cdot 180°$. De större inre vinklarna är $360° - 90° = 270°$, och då får vi storleken på spetsvinkeln α

$$\frac{8 \cdot 180° - 5 \cdot 270°}{5} = 8 \cdot 36° - 270° = 18°.$$

10. En regelbunden femhörning delas i tu med ett rakt snitt. Vilket av följande alternativ är INTE en möjlig kombination för formerna av delarna som bildades?

a) Två fyrhörinngar **b)** Två femhörningar **c)** En triangel och en fyrhörning **d)** En triangel och en femhörning **e)** En fyrhörning och en femhörning

Lösning. **b)** Då femhörningen delas itu med ett rakt snitt, bildas det högst fyra nya hörn inne i femhörningen. Därför kan det i de nya bitarna högst finnas $5 + 4 = 9$ hörn. Då det finns tio hörn i två femhörningar, är b-alternativet omöjligt. De andra alternativen är möjliga, vilket framgår från följande bilder:



11. En talföljd består av 2020 tal, av vilka alla är talen 1 eller -1. Samma tal får förekomma högst 3 gånger i rad. Vad är den största möjliga summan av talen i denna talföljd?

a) 0 **b)** 505 **c)** 1010 **d)** 1515 **e)** 2020

Lösning. c) 1010: Summan av talen i talföljden är möjligast stor, då den består av möjligast många positiva ettor. Ett tal får förekomma högst tre gånger efter varann, därför måste det alltid efter tre ettor komma -1. Den största summan fås med talföljden som består av delföljden 1,1,1,-1, som upprepas om och om igen. Då $2020/4 = 505$, har vi exakt 505 stycken av dessa delföljder i vår talföljd. Alla delföljder ökar summan med 2, därför är den maximala summan $2 \cdot 505 = 1010$.

12. Jonas och Jussi har båda 100 euro i kontanter. På första dagen sätter Jonas en tiondel av sina kontanter på sitt konto, och Jussi lyfter från sitt konto en summa, som motsvarar en tiondel av hans kontanter. På den andra dagen sätter Jussi in en tiondel av kontanterna han har för tillfället, och Jonas lyfter från sitt konto en summa, som motsvarar en tiondel av de kontanter han har för tillfället. Vem av dem har i slutändan mera kontanter?

a) Jussi **b)** Jonas **c)** Båda har lika mycket kontanter **d)** Svaret beror på mängden pengar på Jussis konto **e)** Svaret beror på mängden pengar på Jonas konto

Lösning. c) I slutet har båda följande mängd kontanter: $100 \cdot \frac{11}{10} \cdot \frac{9}{10} = 100 \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{11}{10}$ euro.

13. Hur många olika fyra bokstäver långa ord kan man bilda av bokstäverna A, B, C, A? (Orden behöver inte betyda någonting)

a) 6 **b)** 12 **c)** 18 **d)** 24 **e)** 30.

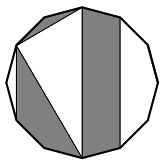
Lösning. b) 12: Om första bokstaven är A, kan man ordna de tre sista bokstäverna på $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ olika sätt. Om första bokstaven är B eller C, så kan man bland de tre sista bokstäverna granska den som inte är A: den bokstaven kan placeras på tre olika ställen. Det finns alltså $6 + 3 + 3 = 12$ olika ord man kan bilda.

14. Grodorna Sam och Panu ska hoppa längs en rak bana på 60 centimeter. Panus alla hopp är lika långa. Sams första hopp är 2 centimeter, och sedan hoppar han alltid lika långt som han dittills hoppat sammanlagt. Hur långa måste Panus hopp minst vara, för att båda grodorna skall komma i mål med samma antal hopp?

a) 5 cm **b)** 8 cm **c)** 10 cm **d)** 15 cm **e)** 20 cm

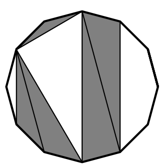
Lösning. c) Sam har efter n hopp framskridit 2^n centimeter. Då $2^5 = 32$ och $2^6 = 64$, behöver Sam 6 hopp för att komma i mål. För att Panu ska hinna i mål med 6 hopp, måste hans hopp vara minst 10 centimeter.

15. Här har vi en regelbunden 12-hörning. Hela 12-hörningens area är 1. Vad är det skuggade områdets area?

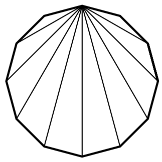


a) $\frac{1}{5}$ **b)** $\frac{1}{4}$ **c)** $\frac{1}{3}$ **d)** $\frac{5}{12}$ **e)** $\frac{1}{2}$

Lösning. Vi kan dela in 12-hörningen i trianglar på följande vis:



Och andra sidan kan vi även dela in 12-hörningen i trianglar såhär:



I den här figuren ser vi fem olika trianglar, två stycken av alla sorter. I det skuggade området förekommer exakt en av varje triangeltyp. Därför är det skuggade områdets area exakt hälften av hela 12-hörningen, alltså 1/2.