

OULUN SEUDUN SEITSEMÄSLUOKKALAISTEN
MATEMATIIKKAKILPAILUN FINAALI 17.4.2021
RATKAISUJA

1. Jussilla on kaksi kymmenen litran ämpäriä ja yksi kolmen litran ämpäri. Suuremmista ämpäreistä toisessa on vettä yhdeksän litraa, ja toinen on täsmälleen puolillaan. Kolmen litran ämpäri on tyhjä.

Jussi haluaa mitata suurempiin ämpäreihin kumpaankin täsmälleen seitsemän litraa vettä ja pitää pienimmän ämpärin tyhjillään. Kuinka Jussi voi päästä tavoitteeseensa? Vettä voi kaataa ämpäristä toiseen, mutta kaatamista on jatkettava, kunnes toinen ämpäreistä on täynnä tai tyhjä. Vettä ei saa mistään lisää, ja Jussilla ei ole muita työvälineitä apunaan.

Ratkaisu. Kutsutaan ämpäriksi A kymmenen litran ämpäriä, jossa on aluksi 9 litraa vettä, ämpäriksi B kolmen litran ämpäriä ja ämpäriksi C toista kymmenen litran ämpäriä, jossa on 5 litraa vettä.

Kaadetaan aluksi vettä ämpäristä A ämpäriin C , minkä jälkeen ämpäriässä A on vettä 4 litraa ja ämpäriässä C 10 litraa. Tämän jälkeen kaadetaan vettä ämpäristä C ämpäriin B , jolloin ämpäriässä B on vettä 3 litraa ja ämpäriässä C 7 litraa. Viimeiseksi, kaadetaan vesi ämpäristä B ämpäriin A , minkä jälkeen sekä ämpäriässä A että ämpäriässä C on vettä 7 litraa ja ämpäri B on tyhjillään.

2. Löydät edestäsi laitteen, jossa on rivissä viisi vipua. Vipujen pituudet vasemmalta oikealle ovat 3, 2, 1, 2 ja 3. Kääntämällä vipuja oikeassa järjestyksessä pääset käsiksi salaoven takana olevaan aarteeseen. Aiemmilla seikkailuilta olet kerännyt seuraavat vihjeet, jotka auttavat oikean kääntöjärjestyksen selvittämisessä:

- 1) Ensimmäisen vivun vieressä ei ole sitä pidempää vipua.
- 2) Toinen vipu on lyhimmän vivun oikealla puolella.
- 3) Kolmas vipu on lyhyempi kuin mikään tähän asti käännettyistä vivuista.
- 4) Neljäntenä käännettävä vipu ei ole lyhin eikä pisin
- 5) Viimeisen vivun vieressä kummallakin puolella on vipu, ja toinen näistä käännettiin toisena.

Missä järjestyksessä vipuja on käännettävä, jotta salaovi aukeaa?

Ratkaisu. Merkitään vipuja vasemmalta oikealle kirjaimilla A, B, C, D ja E . Merkitään alla olevaan taulukkoon vihjeiden perusteella, mitkä ovat mahdolliset käännettävät vivut kussakin vaiheessa.

Vihje	A	B	C	D	E
1	x				x
2				x	x
3		x	x	x	
4		x		x	
5			x	x	

Taulukosta nähdään, että ensimmäisenä käännettään vipu A , koska se ei sovi kuin ensimmäiseen vihjeeseen. Tällöin vivulle E jää vaihtoehdoksi vain, että se käännettään toisena. Koska E käännettään toisena, niin viimeisenä käännettävän vivun on oltava D . Näin ollen vipu C on käännettävä kolmantena. Neljäntenä käännettään siis vipu B .

3.

- a) Perustele, onko seuraava väite tosi vai epätosi: Aina kun kahdella monikulmiolla on sama piiri, niillä on myös sama pinta-ala.
- b) Anna esimerkki sellaisesta suorakulmiosta, jonka piiri on yhtä suuri kuin pinta-ala. Yksi-
köitä ei huomioida.

Ratkaisu. a) Väite on epätosi. Esimerkiksi neliön, jonka sivun pituus on 2, piiri on $4 \cdot 2 = 8$ ja pinta-ala $2 \cdot 2 = 4$. Suorakaiteen, jonka sivujen pituudet ovat 1 ja 3, piiri on myös $8 = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 3$, mutta pinta-ala on $3 \cdot 1 = 3 \neq 4$.

b) Esimerkiksi neliön, jonka sivun pituus on 4, piiri on $4 \cdot 4 = 16$ ja pinta-ala on myös $4 \cdot 4 = 16$.

4. Määritä kaikki sellaiset kokonaisluvut x ja y , että yhtälö

$$xy + x = 23$$

on tosi?

Ratkaisu. Yhtälö voidaan sieventää muotoon

$$x(y + 1) = 23.$$

Koska 23 on alkuluku, se voidaan esittää kahden kokonaisluvun tulona vain kahdella tavalla: $23 = 1 \cdot 23 = (-1) \cdot (-23)$. Näin ollen yhtälön ainoat kokonaislukuratkaisut ovat

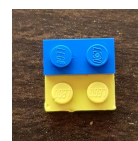
$$x = 1 \text{ ja } y + 1 = 23 \text{ eli } y = 22,$$

$$x = 23 \text{ ja } y + 1 = 1 \text{ eli } y = 0,$$

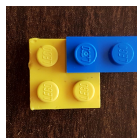
$$x = -1 \text{ ja } y + 1 = -23 \text{ eli } y = -24,$$

$$x = -23 \text{ ja } y + 1 = -1 \text{ eli } y = -2.$$

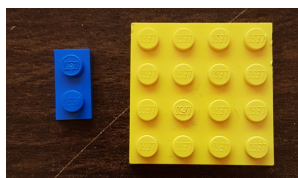
5. Sininen 1×2 -legopalikka voidaan liittää keltaisen 2×2 -legopalikan päälle kolmella eri tavalla:



Erilaisten liitostapojen lukumäärän laskussa on ajateltu samoiksi sellaiset liitokset, jotka saadaan toisistaan kiertämällä. Esimerkiksi alla olevat tilanteet katsotaan liitostapojen lukumäärää laskiessa samoiksi:



Monellako eri tavalla sininen 1×2 -legopalikka voidaan liittää keltaisen 4×4 -legopalikan päälle, kun kiertämällä toisistaan saadut liitostavat lasketaan samoiksi?



Ratkaisu. Jos sininen palikka on vaakasuunnassa, niin sen vasen nasta voidaan asettaa minkä tahansa keltaisen palikan 16 nastasta päälle. Lisäksi vasen nasta voi jäädä keltaisen palikan ulkopuolelle 4 tavalla. Näin ollen sininen palikka voidaan asettaa vaakasuunnassa keltaisen palikan päälle 20 tavalla. Vastaavasti sininen palikka voidaan asettaa keltaisen palikan päälle pystysuunnassa 20 tavalla. Huomioimatta kiertoja tapoja on siis yhteensä 40. Asetettiinpa sininen palikka keltaisen päälle miten tahansa, niin kiertämällä asetelmaa 90° , 180° tai 270° saadaan aina eri tilanne kuin alussa. Näin ollen kukin tapa on edellä laskettu neljään kertaan eli kierrot huomioiden erilaisia liitostapoja on $40/4 = 10$.