

OULUN SEUDUN SEITSEMÄSLUOKKALAISTEN
MATEMATIIKKAKILPAILU 22.–26.2.2021
RATKAISUJA

1. Laske $1 - 2 + 3 - 4 + 5$.

- a) -1 b) 0 c) 1 d) 2 e) 3

Ratkaisu. e) 3:

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 = 1 + (-2 + 3) + (-4 + 5) = 1 + 1 + 1 = 3$$

2. Laske $\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$.

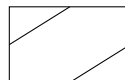
- a) $\frac{1}{2}$ b) 2 c) 32 d) 120 e) 3840

Ratkaisu. c) 32:

$$\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{2^5 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 2^5 = 32$$

3. Monellako eri tavalla kuvan lipun voi värittää, kun käytössä on kolme väriä ja vierekkäiset alueet eivät saa olla samanväriset? Kaikissa värityksissä ei tarvitse käyttää jokaista väriä.

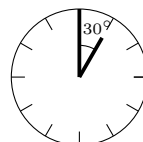
- a) 3 b) 6 c) 9 d) 12 e) 15



Ratkaisu. d) 12: Suurimman (keskimmäisen) alueen värielle on kolme vaihtoehtoa. Tämän jälkeen kummankin nurkan värielle on molemmille kaksi vaihtoehtoa. Näin ollen erilaisia värityksiä on $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$.

4. Kun kello on tasan yksi, niin kellon viisareiden välinen kulma on 30° . Mikä on kellon viisareiden välinen kulma, kun kello on puoli neljä?

- a) 30° b) 45° c) 60° d) 75° e) 90°



Ratkaisu. d) 75° : Kun kello on puoli neljä, minuuttiviisari osoittaa suoraan alaspäin kello kuuteen ja tuntiviisari on puolivälissä kello kolmea ja neljää. Koska kahden kellotaulun numeron väli on 30° , niin tuntiviisari on 15° kello kolmesta myötäpäivään. Koska kello kolmen ja kuuden välinen kulma on 90° , niin viisareiden välinen kulma on $90^\circ - 15^\circ = 75^\circ$, kun kello on puoli neljä.

5. Sofia kävi ostoksilla kolmessa eri liikkeessä. Ensimmäisessä liikkeessä hän käytti rahoistaan kolmasosan ja toisessa liikkeessä jäljellä olevista rahoistaan puolet. Kolmanteen liikkeeseen matkalla ollessaan hän löysi maasta 10 euron setelin, jonka otti itselleen. Kolmannessa liikkeessä hän käytti vielä neljäsosan jäljellä olevista rahoistaan. Ostosten jälkeen Sofialla oli rahaa jäljellä 18 euroa. Kuinka monta euroa Sofialla oli rahaa alussa?

- a) 12 b) 42 c) 72 d) 144 e) 372

Ratkaisu. b) 42: Merkitään Sofian rahamäärää alussa kirjaimella m . Ensimmäisen liikkeen ostosten jälkeen Sofian rahoista oli jäljellä $m - \frac{1}{3}m = \frac{2}{3}m$ euroa. Toiseen liikkeeseen hupeni tästä puolet eli jäljellä oli sitten $\frac{\frac{2}{3}m}{2} = \frac{1}{3}m$ euroa. Tämän jälkeen Sofian rahat karttuivat 10 eurolla ja hänellä oli $\frac{1}{3}m + 10$ euroa. Viimeisestä liikkeestä lähtiessään Sofialla oli jäljellä vielä $\frac{3}{4}(\frac{1}{3}m + 10) = 18$ euroa. Tästä saadaan ratkaistua $m = 42$.

6. Mikä on luvun

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 2019 + 2020 + 2021$$

viimeinen numero?

- a) 1 b) 5 c) 7 d) 8 e) 0

Ratkaisu. a) 1: Nyt

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 2019 + 2020 + 2021 = 2021 \cdot \frac{1 + 2021}{2} = 2021 \cdot 1011.$$

Koska kummankin tulon tekijän viimeinen numero on 1, niin myös tulon $2021 \cdot 1011$ viimeinen numero on 1.

7. Montako sellaista positiivista kaksinumeroista kokonaislukua on olemassa, että luvun numeroiden tulo on suurempi kuin luku itse? Esimerkiksi luku 29 ei toteuta kyseistä ehtoa, koska $2 \cdot 9 = 18 < 29$.

- a) 1 b) 3 c) 5 d) 7 e) Ei yhtäkään

Ratkaisu. e): Kaksinumeroinen luku voidaan esittää muodossa $10a + b$, missä a ja b ovat kokonaislukuja väliltä 0-9. Koska $b \leq 9$, niin $ab \leq 9a < 10a + b$.

8. Tiedetään, että merkintä ∇ tarkoittaa jotakin laskutoimitusta. Tiedetään lisäksi, että $5\nabla 3 = 3\nabla 5$ ja luku $\frac{4\nabla 4}{2\nabla 4}$ on kokonaisluku. Mitä laskutoimitusta merkintä ∇ voi tarkoittaa?

- a) Yhteen- b) Vähennys- c) Kerto- d) Jakolaskua e) Ei mitään edellisistä

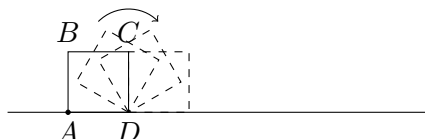
Ratkaisu. c): Ensimmäisen lisätiedon perusteella kyseessä ei voi olla vähennyslasku tai jakolasku, sillä $5 - 3 = 2 \neq -2 = 3 - 5$ ja $\frac{5}{3} \neq \frac{3}{5}$. Toisen lisätiedon perusteella kyseessä ei voi olla yhteenlasku, sillä $\frac{4+4}{2+4} = \frac{8}{6}$ ei ole kokonaisluku. Kertolasku kuitenkin toteuttaa molemmat ehdot, sillä $5 \cdot 3 = 15 = 3 \cdot 5$ ja $\frac{4 \cdot 4}{2 \cdot 4} = 2$.

9. Matti haluaa selvittää, paljonko eräässä tulitikkuaaskissa on tikkuja jäljellä. Hän tietää, että alun perin tikkuja oli askissa 70. Matti toteaa, että **kaikki** jäljellä olevat tikut käyttämällä hän voi muodostaa niistä joko tasasivuisen kolmion, neliön tai säännöllisen viisikulmion. Kuinka monta tulitikkua askissa on jäljellä?

- a) 12 b) 25 c) 40 d) 60 e) 70

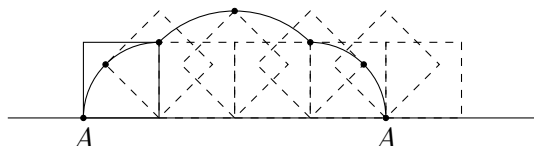
Ratkaisu. d) Jokaisen kuvion kussakin sivussa on oltava yhtä monta tulitikkua. Tulitikkujen lukumäärän on siis oltava jaollinen luvuilla 3, 4 ja 5. Pienin tällainen luku on $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$, tätä suuremmat sopivat luvut ovat yli 70.

10. Neliötä $ABCD$ vieritetään tasaista pintaa pitkin aina oikean alanurkan ympäri. Vierittämistä jatketaan niin kauan, että kärkipiste A on taas vasemmassa alanurkassa. Minkälaisen kuvion kärkipiste A piirtää tasoon vierityksessä?



- a)  b)  c)  d)  e) 

Ratkaisu. a):



11. Jarmolla on 1,5 kg vihreää lankaa, 2 kg valkoista lankaa ja 3 kg mustaa lankaa, joista hän aikoo tehdä mahdollisimman paljon villasukkia. Yhteen villasukkaan tarvitsee 35 g vihreää lankaa, 55 g valkoista lankaa ja 70 g mustaa lankaa. Minkä värinen lanka loppuu ensin kesken?

- a) Vihreä. b) Valkoinen. c) Musta. d) Vihreä ja musta yhtä aikaa. e) Valkoinen ja musta yhtä aikaa.

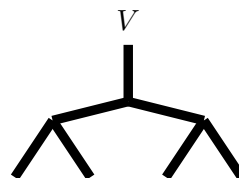
Ratkaisu. b): Koska

$$\frac{1,5 \text{ kg}}{35 \text{ g}} = \frac{1500 \text{ g}}{35 \text{ g}} \approx 42,9,$$

niin vihreää lankaa riittää 42 villasukkaan. Vastaavasti $2000/55 \approx 36,4$ ja $3000/70 \approx 42,9$, joten valkoista lankaa riittää 36 villasukkaan ja mustaa 42 villasukkaan. Valkoinen lanka loppuu siis ensin kesken.

12. Alla olevaan putkistoon kaadetaan vettä suuaukosta V ja vesi tulee ulos putkiston alaosassa olevista neljästä suuaukosta. Putkisto on rakennettu sinisistä ja punaisista putkista, joita on yhteensä 7. Vesi virtaa sinisen putken läpi 1 sekunnissa ja punaisen putken läpi 2 sekunnissa. Kuinka monella eri tavalla putkisto voidaan rakentaa niin, että vesi tulee ulos kaikista suuaukoista yhtäaikaan?

- a) 11 b) 12 c) 13 d) 14 e) 15



Ratkaisu. b) 12: Vesi tulee ulos jokaisesta suuaukosta yhtäaikaan vain, jos jokaisella reitillä on yhtä monta sinistä ja punaista putkea. Kaksi tapausta saadaan, kun kaikki putket ovat samanväriset. Jos jokaisella reitillä on vain yksi sininen putki, mahdollisuuksia on 5: jos ylin putki on sininen, niin loput ovat punaisia, tai jos ylin putki on punainen, niin jokaista keskimmäisen kahden putken neljää värikombinaatiota vastaa yksi tapaus (jos keskimäinen putki on sininen, niin sitä seuraavat kaksi putkea ovat punaisia, ja päin vastoin). Vastaavasti, jos jokaisella reitillä on vain yksi punainen putki, saadaan 5 vaihtoehtoa. Yhteensä tapoja on siis 12.

13. Kokonaisluvut $1, 2, \dots, 10$ halutaan maalata seuraavaa sääntöä noudattaen: Jos kokonaisluku a on maalattu värillä V , niin kokonaisluvuista $a + 1, a + 2, \dots, a + a$ yksikään ei ole maalattu värillä V . Montako väriä vähintään tarvitaan lukujen $1, 2, \dots, 10$ maalaamiseen?

- a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) 10

Ratkaisu. d): Jos luku 1 maalataan värillä V_1 , muita saman värisiä lukuja voivat olla 3 ja 7. Värillä V_2 maalataan luvut 2 ja 5. Värillä V_3 maalataan luvut 4 ja 9. Jäljellä oleville luvuille 6, 8 ja 10 tarvitaan vielä kolme väriä V_4, V_5 ja V_6 .

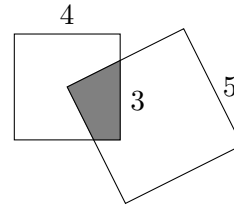
14. Mikä seuraavista väitteistä on tosi?

- a) Jos kokonaisluku on jaollinen kolmella, se on varmasti pariton.
 b) Jos kokonaisluku on pariton, se on varmasti jaollinen kolmella.
 c) Jos kokonaisluku on jaollinen kolmella, se on varmasti parillinen.
 d) Jos kokonaisluku on parillinen, se on varmasti jaollinen kolmella.
 e) Mikään edellisistä väitteistä ei pidä paikkaansa.

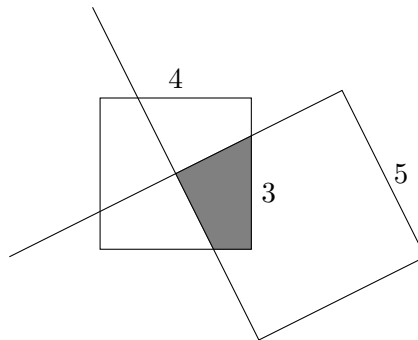
Ratkaisu. e) : Väite a) ei ole tosi, sillä esimerkiksi luku 6 on jaollinen kolmella, mutta ei ole pariton. Väite b) ei ole tosi, sillä esimerkiksi luku 7 on pariton, mutta ei ole jaollinen kolmella. Väite c) ei ole tosi, sillä esimerkiksi luku 3 on jaollinen kolmella, mutta ei ole parillinen. Väite d) ei ole tosi, sillä esimerkiksi luku 2 on parillinen, mutta ei ole jaollinen kolmella. Siispä oikea vaihtoehto on e).

15. Neliön, jonka sivun pituus on 5, yksi kärki on toisen neliön, jonka sivun pituus on 4, keskipisteessä. Mikä on väritetyn alueen pinta-ala, kun sen pystysuoran sivun pituus on 3?

- a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) 7



Ratkaisu. b) 4: Jatkamalla suuremman neliön sivuja nähdään, että pienempi neliö jakaantuu neljään yhtenevään alueeseen, joista yksi on väritetty alue.



Näin ollen väritetyn alueen pinta-ala on neljäsosa pienemmän neliön pinta-alasta eli $4 \cdot 4/4 = 4$.