Matematiktävling för elever i sjunde årskursen i Uleåborgs region 22.–26.2.2021
Lösningar

1. Beräkna $1-2+3-4+5$.

a) -1 **b)** 0 **c)** 1 **d)** 2 **e)** 3

Lösning. **e)** 3:

$$1-2+3-4+5 = 1+(-2+3)+(-4+5) = 1+1+1 = 3$$

2. Beräkna $\frac{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}$.

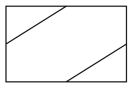
a) $\frac{1}{2}$ **b)** 2 **c)** 32 **d)** 120 **e)** 3840

Lösning. **c)** 32:

$$\frac{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} = \frac{2^5\cdot1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} = 2^5 = 32$$

3. På hur många olika sätt kan flaggan nedan färgläggas, om det finns tre olika färger tillgängliga och intilliggande områden inte får ha samma färg? Alla färger måste inte användas när flaggan färgläggs.

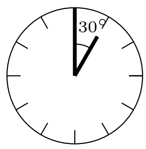
a) 3 **b)** 6 **c)** 9 **d)** 12 **e)** 15



Lösning. **d)** 12: Det finns tre olika färger för det största (mellersta) området. Sedan finns det två olika färger för båda hörnområden. Allt som allt finns alltså $3\cdot2\cdot2 = 12$ olika färgläggningar.

4. När klockan är exakt ett är vinkeln mellan klockans visare $30°$. Vad är vinkeln mellan klockans visare när klockan är halv fyra?

a) $30°$ **b)** $45°$ **c)** $60°$ **d)** $75°$ **e)** $90°$



Lösning. **d)** $75°$: När klockan är halv fyra så pekar minutvisaren rakt ner och timvisaren rakt mellan klockan tre och fyra. Eftersom det är $30°$ mellan två timmesmarkeringar på klockan, så ligger timvisaren $15°$ efter klockan tre. Eftersom klockan tre har en vinkel på $90°$, så måste vinkeln mellan visarna vara $90° - 15° = 75°$ när klockan är halv fyra.

5. Sofia handlade i tre olika butiker. I den första butiken spenderade hon en tredjedel av sina pengar och i den andra butiken spenderade hon hälften av sina återstående pengar. På väg till den tredje butiken hittade hon en 10-euros sedel på marken, som hon beslagtog. I den tredje butiken spenderade hon ytterligare en fjärdedel av sina återstående pengar. Efter alla inköp hade Sofia 18 euro kvar. Hur många euro hade Sofia i början?

a) 12 **b)** 42 **c)** 72 **d)** 144 **e)** 372

Lösning. **b)** 42: Beteckna Sofias pengar med bokstaven m. Efter det första inköpet har Sofia $m-\frac{1}{3}m = \frac{2}{3}m$ euro kvar. Efter det andra inköpet har Sofia $\frac{\frac{2}{3}m}{2} = \frac{1}{3}m$ euro. Sedan tjänar Sofia 10 euro, så hon har då $\frac{1}{3}m+10$ euro. Efter det sista inköpet har hon ännu $\frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}m+10\right) = 18$ euro. Från detta får vi $m = 42$.

6. Vilken är den sista siffran i talet

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 2019 + 2020 + 2021?$$

a) 1 **b)** 5 **c)** 7 **d)** 8 **e)** 0

Lösning. **b)** 1: Observera att

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 2019 + 2020 + 2021 = 2021 \cdot \frac{1 + 2021}{2} = 2021 \cdot 1011.$$

Eftersom den sista siffran i båda faktorer är 1, så är också den sista siffran i produkten 1.

7. Hur många positiva tvåsiffriga heltal finns det med egenskapen att produkten av siffrorna i talet är större än talet själv? Till exempel har talet 29 inte den egenskapen, eftersom $2 \cdot 9 = 18 < 29$.

a) 1 **b)** 3 **c)** 5 **d)** 7 **e)** Inte ett enda

Lösning. **e)**: Ett tvåsiffrigt heltal kan skrivas i formen $10a + b$, där a och b är heltal mellan 0-9. Eftersom $b \leq 9$, så är $ab \leq 9a < 10a + b$.

8. Anta att symbolen $\triangledown$ motsvarar något räknesätt. Vi vet att $5\triangledown 3 = 3\triangledown 5$ och att talet $\frac{4\triangledown 4}{2\triangledown 4}$ är ett heltal. Vilket räknesätt motsvarar symbolen $\triangledown$?

a) Addition **b)** Subtraktion **c)** Multiplikation **d)** Division **e)** Inget av de andra

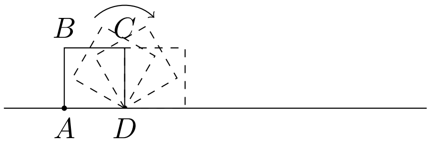
Lösning. **c)**: Från det första påståendet vet vi att det inte kan vara subtraktion eller division, eftersom $5 - 3 = 2 \neq -2 = 3 - 5$ och $\frac{5}{3} \neq \frac{3}{5}$. Från det andra påståendet vet vi att det inte heller kan vara addition, eftersom $\frac{4+4}{2+4} = \frac{8}{6}$ inte är ett heltal. Multiplikation uppfyller dock båda villkor, eftersom $5 \cdot 3 = 15 = 3 \cdot 5$ och $\frac{4 \cdot 4}{2 \cdot 4} = 2$.

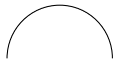
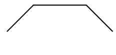
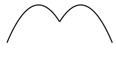
9. Matti vill ta reda på hur många tändstickor som finns kvar i en tändsticksask. Han vet att det ursprungligen fanns 70 stickor i asken. Matti observerar att **alla** återstående stickor tillsammans kan bilda en liksidig triangel, en kvadrat eller en regelbunden femhörning. Hur många tändstickor finns kvar i tändsticksasken?

a) 12 **b)** 25 **c)** 40 **d)** 60 **e)** 70

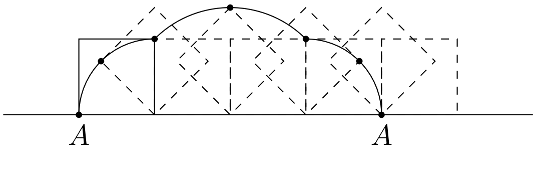
Lösning. **d)** Det måste finnas lika många tändstickor på varje sida av varje figur. Därför måste antalet tändstickor vara delbart med $3, 4$ och 5. Det minsta möjliga antalet blir då $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$. Alla andra antal som uppfyller kravet är större än 70.

10. Kvadraten $ABCD$ rullas längs med en plan yta, så att vridningen alltid sker runt det nedre högra hörnet. Rullningen fortsätter tills hörnpunkten A återvänder till sin ursprungsposition, det nedre vänstra hörnet. Hurdant mönster bildar rullningen om du ritar A:s bana i planet?



a)  **b)**  **c)**  **d)**  **e)** 

Lösning. **a)**:



11. Jarmo har 1,5 kg grönt garn, 2 kg vitt garn och 3 kg svart garn, av vilka han tänker sticka så många yllesockor som möjligt. En yllesocka behöver 35 g grönt garn, 55 g vitt garn och 70 g svart garn. Vilken av de färgade garnen tar slut först?

a) Grönt **b)** Vitt **c)** Svart **d)** Grön och svart på samma gång **e)** Vit och svart på samma gång

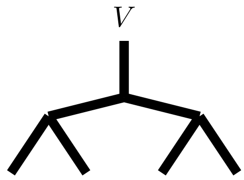
Lösning. b): Eftersom

$$\frac{1{,}5 \text{ kg}}{35 \text{ g}} = \frac{1500 \text{ g}}{35 \text{ g}} \approx 42{,}9,$$

så räcker det gröna garnet till 42 yllesockor. På motsvarande sätt får vi $2000/55 \approx 36{,}4$ och $3000/70 \approx 42{,}9$, så vitt garn räcker till 36 yllesockor och svart garn till 42 yllesockor. Vitt garn tar alltså slut först.

12. Vatten hälls i rören nedan från öppningen V så att vatten kommer ut ur de fyra öppningarna längst ner. Rören är antingen blå eller röda, och det finns totalt 7 stycken. Vatten rinner genom ett blått rör på 1 sekund och genom ett rött rör på 2 sekunder. På hur många olika sätt kan rören kombineras så att vatten kommer ut ur alla nedre öppningar samtidigt?

a) 11 **b)** 12 **c)** 13 **d)** 14 **e)** 15



Lösning. b) 12: Vatten kommer ut ur varje öppning samtidigt endast om det finns lika många blå och röda rör på varje väg ner. Vi får två möjligheter från att färga alla rör i samma färg. Om det finns bara ett blått rör på varje väg ner, så finns det 5 möjligheter: om det översta röret är blått, så är resten röda. Om det översta röret är rött, så finns det fyra färgkombinationer i de två mellersta rören, som var och en motsvarar en möjlighet (om det mellersta röret är blått, så är följande två rör röda, och vice versa). Om det finns bara ett rött rör på varje väg ner, så finns det på samma sätt 5 möjligheter. Totalt finns alltså 12 olika sätt.

13. Du vill färglägga heltalen $1, 2, \ldots, 10$ enligt följande regel: Om heltalet a är målat i färgen V, så är inget av heltalen $a+1, a+2, \ldots, a+a$ målat i färgen V. Hur många färger behövs för att kunna måla talen $1, 2, \ldots, 10$?

a) 3 **b)** 4 **c)** 5 **d)** 6 **e)** 10

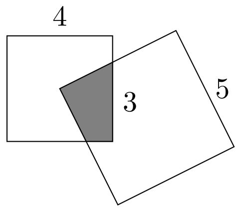
Lösning. d): Om siffran 1 målas med färgen F_1, så kommer samma färg också att finnas på siffrorna 3 och 7. Färgen F_2 målas sedan på siffrorna 2 och 5. Färgen F_3 målas på siffrorna 4 och 9. För de återstående siffrorna 6,8 och 10 behövs tre till färger: F_4, F_5 och F_6.

14. Vilket av följande påståenden är sant?

a) Om ett heltal är delbart med tre, så är det garanterat udda.
b) Om ett heltal är udda, så är det garanterat delbart med tre.
c) Om ett heltal är delbart med tre, så är det garanterat jämnt.
d) Om ett heltal är jämnt, så är det garanterat delbart med tre.
e) Inget av ovanstående påståenden är sant.

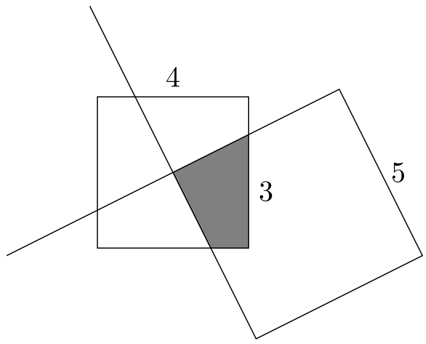
Lösning. e) : Påstående a) är falskt, eftersom t.ex. heltalet 6 är delbart med tre, men inte udda. Påstående b) är falskt, eftersom t.ex. heltalet 7 är udda men inte delbart med tre. Påstående c) är falskt, eftersom t.ex. heltalet 3 är delbart med tre men inte jämnt. Påstående d) är falskt, eftersom t.ex. heltalet 2 är jämnt, men inte delbart med tre. Därför är det enda rätta alternativet e).

15. En hörnpunkt hos en kvadrat med sidolängden 5 ligger i mitten av en annan kvadrat med sidolängden 4. Vad är det färgade områdets area, om dess lodräta sida är längden 3?



a) 3 **b)** 4 **c)** 5 **d)** 6 **e)** 7

Lösning. b) 4: Om vi förlänger sidorna hos den större kvadraten ser vi att den mindre kvadraten blir uppdelad i fyra likadana områden, där ett av dessa är det färgade området.



Därför blir arean för det färgade området en fjärdedel av den mindre kvadratens area, dvs. $4 \cdot 4/4 = 4$.