Satakunnan seitsemäsluokkalaisten matematiikkakilpailu 12.–16.4.2021
Ratkaisuja

1. Laske $1 - 6 + 10$.

a) 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 4 **e)** 5

Ratkaisu. **e)** 5: Suoraan laskemalla saadaan $1 - 6 + 10 = -5 + 10 = 5$.

2. Laske $2 + 20 + 200 + 2000 + 20\,000 + 200\,000$.

a) 222 222 **b)** 2 468 102 **c)** 24 422 190 **d)** 22 222 222 **e)** 100 000 002

Ratkaisu. **a)** 222 222: Kukin uusi luku on aina kymmenen kertaa edellinen. Siis lopputulos on vain kuusi kakkosta peräkkäin eli 222 222.

3. Kulhossa on 60 karkkia. Kolmasosa on salmiakkeja, loput hedelmäkarkkeja ja suklaata. Suklaita on kahdeksan enemmän kuin salmiakkeja. Miten monta hedelmäkarkkia kulhossa on?

a) 4 **b)** 7 **c)** 10 **d)** 12 **e)** 20

Ratkaisu. **d)** 12: Kolmasosa kulhon karkeista on salmiakkeja eli $60/3 = 20$. Suklaakarkkeja on siis $20 + 8 = 28$ ja hedelmäkarkkeja $60 - 20 - 28 = 12$.

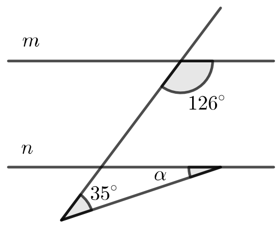
4. Kirjoitetaan suuruusjärjestyksessä viidellä jaollisia kokonaislukuja luvusta viisi alkaen: $5, 10, 15, 20, \ldots$. Mikä on jonon 2021. jäsenen viimeinen numero?

a) 0 **b)** 2 **c)** 4 **d)** 5 **e)** 7

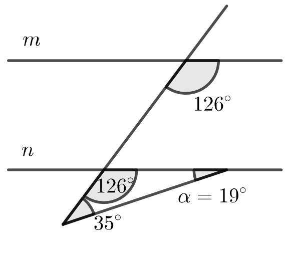
Ratkaisu. **d)** 5: Lukujen viimeiset numerot ovat vuorotellen 5 ja 0 alkaen numerosta 5. Koska 2021 on pariton luku, niin sen viimeinen numero on sama kuin jonon ensimmäisen luvun viimeinen numero eli viisi.

5. Kuvaan merkityt suorat m ja n ovat yhdensuuntaiset. Laske kulman α suuruus.

a) 2° **b)** 7° **c)** 15° **d)** 19° **e)** 35°



Ratkaisu. **d)** 19°: Koska suorat m ja n ovat yhdensuuntaiset, niin sen alhaalla olevan kolmion, jonka kaksi kärkeä ovat 35° ja α, kolmas kärki on 126° samankohtaisten kulmien takia. Täten $\alpha = 180° - 126° - 35° = 19°$.



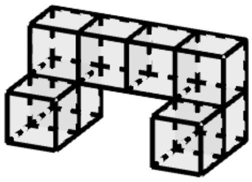
6. Ainolla on viisi jännitys- ja kolme fantasiakirjaa. Leo lainaa Ainolta yhden jännitys- ja yhden fantasiakirjan. Kuinka monella eri tavalla Leo vai valita nämä kaksi kirjaa?

a) 1 **b)** 8 **c)** 15 **d)** 27 **e)** 125

Ratkaisu. c) 15: Erilaisia yhdistelmiä on $5 \cdot 3 = 15$ ja näin ollen myös vaihtoehtoja.

7. Alla oleva kappale koostuu kahdeksasta pienestä kuutiosta, joista jokaisen sivun pituus on 1 metri. Kappale maalataan vihreäksi. Kymmenen neliömetrin maalaamiseen tarvitaan litra maalia. Maalia myydään litran purkeissa. Kuinka monta purkkia tarvitaan?

a) 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 4 **e)** 5



Ratkaisu. d) 3: Yhden kuution tahkon pinta-ala on 1m^2 ja maalattavia tahkoja on 34. Siis maalia tarvitaan 34m^2 varten. Siis maalia tarvitaan $34/10 = 3{,}4$ litraa. Täten tarvitaan neljä maalipurkkia.

8. Kuinka monen positiivisen kokonaisluvun käänteisluku on vähintään alkuperäisen kokonaisluvun suuruinen?

a) 0 **b)** 1 **c)** 7 **d)** 11 **e)** yli sadan

Ratkaisu. b) 1: Kunkin positiivisen kokonaisluvun käänteisluku on yli nolla ja korkeintaan yksi. Ainoa positiivinen kokonaisluku, joka on tällä välillä, on yksi. Sen käänteisluku on $1/1 = 1$ eli se toteuttaa hautut ehdot.

9. Suoran jokainen piste on väritetty punaiseksi tai siniseksi. Kun valitaan suoralta mikä tahansa jana, jonka pituus on 3, niin sen päätepisteet ovat erivärise. Minkä seuraavista pituinen jana, jonka päätepisteet ovat eriväriset, suoralta varmasti löytyy?

a) 5 **b)** 9 **c)** 12 **d)** 14 **e)** Ei mikään edellisistä

Ratkaisu. b) 9: Koska tehtävänannossa annetaan ehto vain kolmen mittaisten janojen päätepisteille, voidaan sanoa varmoja tuloksia vain sellaisille janoille, joiden pituudet ovat kolmella jaollisia. Näin ollen 5 ja 14 mittaisilla janoilla voivat päätepisteet aivan hyvin olla samanväriset.

Lisäksi jana, jonka pituus on 12 ja jonka kolmen mittaisten osajanojen päätepisteet ovat punainen, sininen, punainen, sininen ja punainen, toteuttaa, ehdon, että aina kolmen mittaisten janojen eri päädyt ovat eriväriset. Kuitenkin 12 mittaisen janan päädyt ovat samanväriset. Siis myöskään c-kohta ei ole totta.

Sen sijaan 9 mittaisen janan päädyt ovat aina eriväriset. Kun se jaetaan kolmeen kolmen mittaiseen janaan, niin ensimmäisen janan ensimmäinen päätepiste on yhtä väriä, toinen (eli seuraavan ensimmäinen) toista, kolmannen ensimmäinen piste taas ensimmäistä väriä ja sen päätepiste toista väriä. Siis 9 mittaisen janan päätepisteet ovat varmasti eri värejä.

10. Salmen rannalla A on kymmenen ihmistä ja vene. Ihmiset haluavat päästä veneen avulla vastakkaiselle rannalle B. Veneellä pystyy ylittämään salmen, kun siinä on kaksi tai kolme matkustajaa. Mikä on pienin määrä salmen ylityskertoja, jotka on tehtävä veneellä, jotta kaikki ihmiset pääsevät rannalle B?

(Yhdellä ylityksellä tarkoitetaan, että kuljetaan rannalta A rannalle B tai rannalta B rannalle A. Yksi edestakainen matka on siis kaksi ylitystä. Lopuksi vene jää rannalle B.)

a) 7 **b)** 8 **c)** 15 **d)** 19 **e)** 20

Ratkaisu. **c)** 15: Jos rannalla A on vielä ihmisiä, niin rannalle B voidaan jättää korkeintaan yksi ihminen lisää –muutenhan veneellä ei päästä lainkaan takaisin rannalle A. Näin ollen siis rannalle B on matkustettava ainakin kahdeksan kertaa; ensimmäiset seitsemän siksi, että rannalla A on varmasti jäljellä joku ja viimeinen siksi, että sekä veneessä olevat kaksi ihmistä että rannalla A ollut ihminen pääsevät rannalle B. Tämä tarkoittaa, että vene on ylittänyt salmen $7 \cdot 2 + 1 = 15$ kertaa.

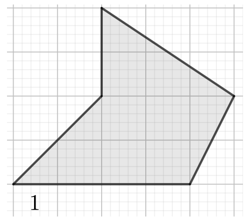
Huomataan myös, että 15 ylitystä on mahdollista saavuttaa. Numeroidaan ihmiset $1, 2, \ldots, 10$. Ensimmäisellä ylityksellä 1, 2 ja 3 menevät rannalta A rannalle B. Henkilö 3 jätetään rannalle B sekä 1 ja 2 käyvät yksitellen hakemassa henkilöt $4, 5, 6, \ldots, 10$ rannalta A. He myös itse jäävät viimeisen henkilön haun jälkeen rannalle B. Yhteensä salmen ylityksiä tulee 15.

11. Internetistä ostetun tavaran toimitusajaksi ilmoitetaan $2-6$ arkipäivää. Minä seuraavista viikonpäivistä paketti voi tulla perille?

a) Maanantaina **b)** Keskiviikkona **c)** Perjantaina
d) Paketti voi saapua minä tahansa edellisistä päivistä riippumatta tilauspäivästä.
e) Ei mikään edellisistä

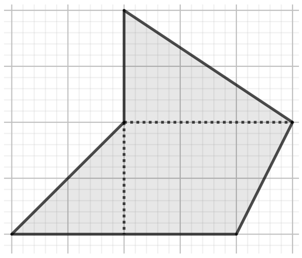
Ratkaisu. **d)** Paketti voi saapua minä tahansa edellisistä päivistä.: Koska vastaus riippuu vain arkipäivistä, niin voidaan ajatella toimituspäiviä arkipäivien jonona ma, ti, ke, to, pe, ma, ti, ke, to, pe, ma,. . .. (Jonossa siis jakso ma, ti, ke, to, pe toistuu äärettömän monta kertaa.) Jos paketti on laitettu tilaukseen päivänä x, niin se voi tulla perille edellisessä jonossa päivinä $x + 2, x + 3, \ldots, x + 6$. Koska päivät muodostavat viiden päivän jakson, niin x ja $x + 5$ sekä $x + 1$ ja $x + 6$ ovat sama päivä. Täten paketti voi tulla perille minä tahansa arkipäivänä. Oikea vastaus on siis d.

12. Kuviossa yhden isomman neliön sivun pituus on 1. Esimerkiksi siis tummennetun kuvion alareunan pituus on 4. Laske tummennetun alueen pinta-ala.



a) 9 **b)** 10 **c)** 15 **d)** 17 **e)** 20

Ratkaisu. **b)** 10: Jaetaan kuvio katkoviivoilla kolmeen osaan kuvan mukaisesti. Kuvion pinta-ala on osien alojen summa. Vasemmalla olevan kolmion kanta ja korkeus ovat molemmat 2, joten sen pinta-ala on $2 \cdot 2/2 = 2$. Puolisuunnikkaan korkeus on 2 ja yhdensuuntaisten sivujen pituuksien summa $2 + 3 = 5$. Siis sen pinta-ala on $2 \cdot 5/2 = 5$. Ylhäällä olevan kolmion korkeus taas on 2 ja kanta 3, joten sen pinta-ala on $2 \cdot 3/2 = 3$. Siis tummennetun alueen pinta-ala on $2 + 5 + 3 = 10$.



13. Laske $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64} + \frac{1}{128} - \frac{1}{256} + \frac{1}{512} - \frac{1}{1024}$.

a) $-\frac{1}{1024}$ **b)** $\frac{535}{1024}$ **c)** 0 **d)** $\frac{1}{2}$ **e)** $\frac{341}{1024}$

Ratkaisu. e) $\frac{341}{1024}$: Summa koostuu kymmenestä murtoluvusta, joista jokaisen nimittäjässä oleva luku on aina kaksi kertaa edellisen luvun nimittäjässä oleva luku. Joka toisen luvun etumerkki on plus ja joka toisen miinus. Koska kaikilla kokonaisluvuilla $n \neq 0$ pätee $\frac{1}{n} - \frac{1}{2n} = \frac{2-1}{2n} = \frac{1}{2n}$, niin saadaan

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \ldots - \frac{1}{256} + \frac{1}{512} - \frac{1}{1024} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \frac{1}{1024}.$$

Lavennetaan oikean puolen summassa kaikkien lukujen nimittäjiksi 1024 ja saadaan edellisen oikeaksi puoleksi

$$= \frac{256 + 64 + 16 + 4 + 1}{1024} = \frac{341}{1024}.$$

14. Suklaapuodissa myydään neliönmuotoisia suklaalevyjä. Ostetaan kaksi suklaalevyä, joissa on yhteensä 65 suklaapalaa. Kuinka monta eri vaihtoehtoa on pienemmässä suklaalevyssä olevien palojen lukumäärälle?

a) 1 **b)** 2 **c)** 4 **d)** 32 **e)** 65

Ratkaisu. b) 2: Koska suklaalevyt ovat neliönmuotoisia, niin levyssä olevien suklaapalojen lukumäärä on yhdellä sivulla olevien palojen lukumäärä kerrottuna itsellään. Tutkitaan pienemmässä levyssä yhdellä sivulla olevien suklaapalojen lukumäärää.

Yhdellä sivulla paloja on vähintään yksi. Jos niitä on yksi, niin koko levyssä on $1 \cdot 1 = 1$ palaa ja isommassa levyssä pitäisi olla $65 - 1 = 64$ palaa. Huomataan, että $64 = 8 \cdot 8$ eli tämä on mahdollista.

Jos yhdellä sivulla on kaksi palaa, niin pienemmässä suklaalevyssä on $2 \cdot 2 = 4$ suklaapalaa. Tällöin isommassa levyssä on oltava $65 - 4 = 61$ palaa. Kuitenkin on $7 \cdot 7 = 49 < 61 < 64 = 8 \cdot 8$ eli minkään suklaalevyn koko ei voi olla 61 palaa. Siis pienemmässä levyssä ei voi olla tasan neljä palaa.

Jos yhdellä sivulla on kolme palaa, niin pienemmässä suklaalevyssä on $3 \cdot 3 = 9$ palaa ja isommassa $65 - 9 = 56$ palaa. Samoin kuin edellisessä tapauksessa havaitaan, ettei tämä tapaus käy.

Jos pienemmän suklaalevyn yhdellä sivulla on neljä palaa, niin isommassa suklaalevyssä on $65 - 4 \cdot 4 = 49$ palaa. On $7 \cdot 7 = 49$ eli tämä tapaus käy.

Jos pienemmän suklaalevyn yhdellä sivulla on viisi palaa, niin isommassa suklaalevyssä on $65 - 5 \cdot 5 = 40$ palaa. On $6 \cdot 6 = 36 < 40 < 49 = 7 \cdot 7$ eli tämäkään ei käy.

Jos taas pienemmän suklaalevyn yhdellä sivulla on vähintään kuusi palaa, niin pienemmässä suklaalevyssä on vähintään $6 \cdot 6 = 36$ palaa ja isommassa isommassa enintään $65 - 36 = 29$ palaa. Mutta isommassa levyssä ei voi olla vähempää paloja kuin pienemmässä. Siis pienemmän levyn yhdellä sivulla voi olla enintään viisi palaa.

Edellisten nojalla pienemmässä levyssä on yksi tai neljä palaa eli vaihtoehtoja on kaksi.

15. Luokassa on 24 oppilasta. Heistä 17 on käynyt talven aikana luistelemassa ja 17 hiihtämässä. Lisäksi osa oppilaista on käynyt pulkkailemassa tai laskettelemassa. Kun valitaan satunnaisesti yksi luokan oppilaista, niin

- $\frac{1}{24}$ todennäköisyydellä hän ei ole harrastanut talven aikana mitään edellämainituista lajeista,
- $\frac{7}{8}$ todennäköisyydellä hän on luistellut tai hiihtänyt ja
- $\frac{7}{8}$ todennäköisyydellä hän on hiihtänyt, pulkkaillut tai lasketellut.

Kuinka moni luokan oppilaista on käynyt ainakin luistelemassa **ja** hiihtämässä talven aikana? (Nämä oppilaat ovat voineet myös pulkkailla tai lasketella.)

a) 10 **b)** 11 **c)** 13 **d)** 15 **e)** 17

Ratkaisu. c) 13: Koska oppilas ei ole harrastanut mitään mainituista talviliikuntalajeista $\frac{1}{24}$ todennäköisyydellä ja luokassa on 24 oppilasta, niin yksi heistä ei ole harrastanut mitään mainituista lajeista. Näin ollen $24 - 1 = 23$ on harrastanut.

Koska $\frac{7}{8} = \frac{21}{24}$, niin 21 luokan oppilaista on luistellut tai hiihtänyt. Edellisen kappaleen nojalla siis $23 - 21 = 2$ oppilasta on lasketellut tai pulkkaillut, mutta ei ole luistellut eikä hiihtänyt.

Kuten edellä, koska $\frac{7}{8} = \frac{21}{24}$, niin 21 oppilasta on hiihtänyt, pulkkaillut tai lasketellut. Ensimmäisen kappaleen nojalla $23 - 21 = 2$ oppilasta on vain luistellut. Koska 17 oppilasta on hiihtänyt, niin $21 - 17 = 4$ oppilasta on pulkkaillut tai lasketellut, mutta ei ole hiihtänyt. Edellisen kappaleen nojalla $4 - 2$ oppilasta on pulkkaillut tai lasketellut ja lisäksi luistellut, mutta ei hiihtänyt.

Nyt siis 17 luistelemassa käyneestä oppilaasta 2 on harrastanut vain luistelua ja 2 luistelun lisäksi pulkkailua tai laskettelua, mutta ei hiihtoa. Näin ollen $17 - 2 - 2 = 13$ oppilasta on harrastanut sekä luistelua että hiihtoa ja on voinut näiden lisäksi harrastaa myös pulkkailua tai laskettelua.