Oulun seudun seitsemäsluokkalaisten matematiikkakilpailun finaali 9.4.2022

Ratkaisuja

1.

a) Laske

$$\frac{7}{4}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{6}{3}\cdot\frac{4}{5}.$$

b) Laske

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}.$$

Ratkaisu.

a)

$$\frac{7}{4}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{6}{3}\cdot\frac{4}{5}=\frac{1\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}=\frac{1}{2}$$

b)

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}=\frac{32+16+8+4+2+1}{64}=\frac{63}{64}$$

2. Mikaela on unohtanut kännykkänsä nelinumeroisen PIN-koodin. Hän muistaa, että siinä oli varmasti numerot 3 ja 7, ja että PIN-koodin numerot olivat kasvavassa järjestyksessä. Lisäksi kukin numero esiintyi vain kerran. Montako vaihtoehtoa Mikaelan PIN-koodille on, kun koodin numerot ovat väliltä 0-9?

Ratkaisu. Jos 3 ja 7 ovat koodin ensimmäiset numerot, niin kahden viimeisen numeron on oltava 8 ja 9, eli tällaisia vaihtoehtoja on vain yksi.

Jos koodin ensimmäinen numero on 3 ja kolmas numero 7, niin toiselle numerolle on 3 vaihtoehtoa (4, 5 tai 6), ja viimeiselle numerolle on 2 vaihtoehtoa (8 tai 9). Yhteensä tässä tapauksessa on siis $3\cdot 2=6$ vaihtoehtoa.

Jos koodin ensimmäinen numero on 3 ja viimeinen numero 7, niin toinen ja kolmas numero voivat olla 4 ja 5, 4 ja 6 tai 5 ja 6. Yhteensä tässä tapauksessa on siis 3 vaihtoehtoa.

Jos 3 ja 7 ovat koodin keskimmäiset numerot, niin ensimmäiselle numerolle on 3 vaihtoehtoa (0, 1 tai 2), ja viimeiselle numerolle on 2 vaihtoehtoa (8 tai 9). Yhteensä tässä tapauksessa on siis $3\cdot 2=6$ vaihtoehtoa.

Jos koodin toinen numero on 3 ja viimeinen numero 7, niin ensimmäiselle numerolle on 3 vaihtoehtoa (0, 1 tai 2), ja kolmannelle numerolle on 3 vaihtoehtoa (4, 5 tai 6). Yhteensä tässä tapauksessa on siis $3\cdot 3=9$ vaihtoehtoa.

Viimeinen tapaus on, että 3 ja 7 ovat koodin viimeiset numerot, jolloin kaksi ensimmäistä numeroa voivat olla 0 ja 1, 0 ja 2 tai 1 ja 2. Näitä tapauksia on siis 3.

Yhteensä koodille on siis $1+6+3+6+9+3=28$ vaihtoehtoa.

3. Eräässä viidakossa elää kaksi tiikeriä, musta ja valkoinen. Molemmat saavat ravintonsa kolmen eri eläinlajin, A, B ja C, edustajista. Kumpikin tiikereistä syö täsmälleen yhden eläimen päivässä selvitäkseen. Tiedämme eläinlajien A, B ja C käytöksestä seuraavaa:

- Jos jonkin eläinlajin edustajista **yksi** tulee syödyksi, laji pysyttelee piilossa **seuraavan päivän**, eivätkä tämän lajin edustajat voi tuolloin tulla syödyksi.
- Jos jonkin eläinlajin edustajista **kaksi** tulee syödyksi samana päivänä, laji pysyttelee piilossa **kaksi seuraavaa päivää**.

Tarkkailemme tiikerien ruokailua viiden päivän ajan. Käytössämme on seuraavat päiväkohtaiset tiedot:

- Ensimmäisenä päivänä musta tiikeri syö lajin A edustajan, ja valkoinen tiikeri syö lajin C edustajan.
- Neljäntenä päivänä laji C ei voi tulla syödyksi, koska se pysyttelee vesisateen vuoksi piilossa.

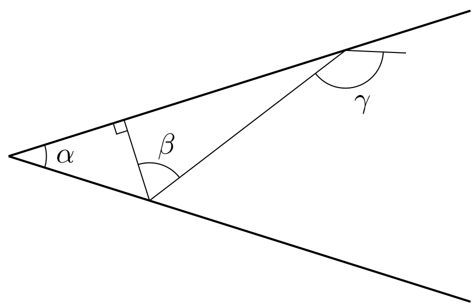
Jos tiedämme, että tiikerit saavat syödäkseen viiden päivän ajan, minkä lajien edustajia tiikerit syövät viidentenä päivänä?

Ratkaisu. Molemmat tiikerit syövät lajin B edustajan: Alla on taulukoitu, minkä lajin edustajan musta (M) ja valkoinen (V) tiikeri syövät kunakin päivänä.

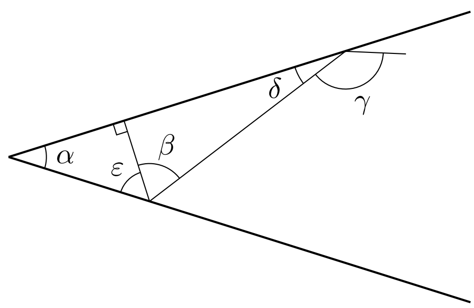
A	M			VM	
B		VM			VM
C	V		VM		

Nimittäin, toisena päivänä kumpikin tiikeri syö lajin B edustajan, koska muut lajit ovat piilossa. Jos kolmantena päivänä toinen tiikereistä olisi valinnut lajin A ja toinen lajin C, neljäntenä päivänä niille ei olisi löytynyt ruokaa. Samoin olisi käynyt, jos molemmat olisivat valinneet lajin A, koska annetun lisäehdon perusteella lajia C ei voi syödä neljäntenä päivänä. Näin ollen molempien tiikereiden on täytynyt kolmantena päivänä syödä lajin C edustaja. Koska neljäntenä päivänä lajit B ja C ovat piilossa, syövät molemmat tiikerit tuolloin lajin A edustajan. Viidentenä päivänä lajien A ja C edustajat ovat piilossa, joten tiikerien on syötävä lajin B edustajat.

4. Lasersäde kulkee kahden peilin välissä kuvan osoittamalla tavalla. Tiedetään, että lasersäteen muodostamien kulmien β ja γ puolittajat ovat kohtisuorassa heijastuspintaa vastaan, ja että $\beta + \gamma = 210°$. Määritä kulma α.



Ratkaisu. $\alpha = 35°$. Merkitään kuvaan vielä kulmat δ ja ε:



Tällöin, koska kulman γ puolittaja on kohtisuorassa heijastuspintaa vastaan, on $\gamma + 2\delta = 180°$, eli $\delta = \frac{180°-\gamma}{2} = 90° - \frac{\gamma}{2}$. Toisaalta, β ja δ ovat suorakulmaisen kolmion kulmia, joten $90° + \beta + \delta = 180°$, josta voimme ratkaista $\delta = 90° - \beta$. Nämä tiedot yhdistämällä tiedämme, että

$$90° - \beta = 90° - \frac{\gamma}{2},$$

josta voimme ratkaista $\gamma = 2\beta$. Sijoittamalla tämä annettuun tietoon $\beta + \gamma = 210°$ saamme, että $\beta + 2\beta = 3\beta = 210°$, joten $\beta = 70°$. Edelleen, koska kulman β puolittaja on kohtisuorassa heijastuspintaa vastaan, on $\beta + 2\varepsilon = 180°$, johon sijoittamalla kulman β laskettu arvo saadaan $70° + 2\varepsilon = 180°$, josta voimme ratkaista $\varepsilon = 55°$. Koska myös α ja ε ovat suorakulmaisen kolmion kulmia, on $90° + \alpha + \varepsilon = 180°$, johon sijoittamalla kulman ε laskettu arvo saadaan $90° + \alpha + 55° = 180°$, josta voimme ratkaista $\alpha = 35°$.

5. Määritä luvun $3^{2022} + 5^{2022}$ viimeinen numero. Tässä a^{2022} tarkoittaa tuloa $a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$, missä luku a esiintyy 2022 kertaa.

Ratkaisu. Luvun viimeinen numero riippuu vain summattavien viimeisistä numeroista, joten tarkastellaan erikseen termien 3^{2022} ja 5^{2022} viimeisiä numeroita. Tulon viimeinen numero riippuu vain tulontekijöiden viimeisistä numeroista. Jos lukua, jonka viimeinen numero on 5, kerrotaan viidellä, niin saadaan luku, jonka viimeinen numero myös on 5. Näin ollen luvun $5^{2022} = \underbrace{5 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 5}_{2022 \text{ kpl}}$ viimeinen numero on 5. Lasketaan luvun 3 potensseja:

$$3^1 = 3, \quad 3^2 = 9, \quad 3^3 = 27, \quad 3^4 = 81, \quad 3^5 = 243, \quad 3^6 = 729, \ldots$$

Huomataan, että luvun 3 potenssien viimeiset numerot toistavat itseään neljän askelen välein siten, että jos eksponentti on neljällä jaollinen, niin potenssin viimeinen numero on 1. Koska $2020 = 4 \cdot 505$ on neljällä jaollinen, niin luvun 3^{2020} viimeinen numero on 1. Näin ollen luvun $3^{2022} = 3^2 \cdot 3^{2020} = 9 \cdot 3^{2020}$ viimeinen numero on 9. Koska lukujen 3^{2022} ja 5^{2022} viimeisten numeroiden summa on $9 + 5 = 14$, niin $3^{2022} + 5^{2022}$ viimeinen numero on 4.