Satakunnan seitsemäsluokkalaisten matematiikkakilpailun finaali 12.5.2022 Ratkaisuita

1.

(a) Laske $12 \cdot 5 + 2022$. (2 pistettä)

(b) Erään lukujonon neljä ensimmäistä jäsentä ovat seuraavat:

$$1, \quad \frac{3}{2}, \quad 2, \quad \frac{5}{2}.$$

Mikä on lukujonon kymmenes jäsen? Muista perustella vastauksesi!

(Tehtävään voi olla erilaisia vastauksia, mutta riittää löytää niistä vain yksi.) (2 pistettä)

(c) Etsi jokin määrä omenoita, joka toteuttaa seuraavat ehdot: Kun omenat jaetaan kolmelle hengelle, jää yksi yli. Viidelle hengelle jaettaessa jako menee tasan ja seitsemälle jaettaessa jää kaksi yli. (2 pistettä)

Ratkaisu.

(a) **Vastaus:** 2082

Suoraan laskemalla saadaan $12 \cdot 5 + 2022 = 60 + 2022 = 2082$.

(b) **Vastaus:** Kymmenes jäsen on $\frac{11}{2}$.

Kun tarkastellaan jonon neljää ensimmäistä jäsentä, huomataan, että kahden peräkkäisen erotus on aina $\frac{1}{2}$. Siis tätä sääntöä noudattamalla kuusu seuraavaa jäsentä ovat

$$3, \quad \frac{7}{2}, \quad 4, \quad \frac{9}{2}, \quad 5, \quad \frac{11}{2}$$

eli kymmenes jäsen on $\frac{11}{2}$.

HUOM! Myös muut perustellut ja oikein olevat säännöt kelpaavat eli tehtävään on useita erilaisia vastauksia.

(c) **Vastaus:** Esimerkiksi sata omenaa toteuttaa nämä ehdot. (Yleisemmin: Mikä tahansa vastaus, mikä saadaan lausekkeesta $100 + 105n$, kun luvun n paikalle laitetaan ei-negatiivinen kokonaisluku, käy.)

Huomio: Tehtävänanto kysee sellaista omenamäärä, jonka jakojäännös kolmella jaaettaessa on yksi, joka menee viidellä jaettaessa tasan ja jonka jakojäännös seitsemällä jaettaessa on kaksi.

Tapa 1: Etsitään omenamäärä käymällä läpi eri vaihtoehtoja. Koska seitsemälle jaettaessa omenoita jää kaksi yli, on omenoita oltava 2 tai sellainen määrä, että lukuun 2 on lisätty seitsemän monikertoja. Koska kaksi omenaa ei mene viidelle hengelle tasan, niin se ei käy. Lisätään nyt tähän lukuun seitsemän monikertoja.

Koska luvut $2 + 7 = 9$, $2 + 2 \cdot 7 = 16$ ja $2 + 3 \cdot 7 = 23$ eivät ole viidellä jaollisia, mikään niistä ei kelpaa kysytyksi omenoiden määräksi.

Luku $2 + 4 \cdot 7 = 30$ taas on kolmella jaollinen eli se ei käy, koska omenoita piti jäädä yksi yli.

Luvut $2 + 5 \cdot 7 = 37$, $2 + 6 \cdot 7 = 44$, $2 + 7 \cdot 7 = 51$ ja $2 + 8 \cdot 7 = 58$ eivät ole viidellä jaollisia, joten ne eivät käy.

Luvun $2 + 9 \cdot 7 = 65$ jakojäännös kolmella jaettaessa on 2, vaikka haluttiin sen olevan yksi. Tämä määrä omenoita ei siis käy.

Luvut $2 + 10 \cdot 7 = 72$, $2 + 11 \cdot 7 = 79$, $2 + 12 \cdot 7 = 86$ ja $2 + 13 \cdot 7 = 93$ eivät ole viidellä jaollisia, joten ne eivät käy.

Omenamäärä $2 + 14 \cdot 7 = 100$ sen sijaan käy: Kolmella jaettaessa jää yksi omena yli, viidelle hengelle jaettaessa jako menee tasan ja seitsemälle hengelle jaettaessa jää kaksi omenaa yli. Valitaan siis tämä lukumäärä.

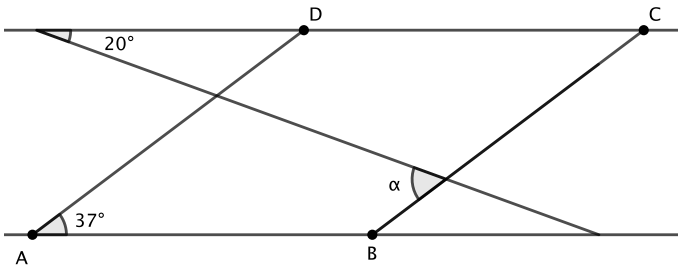
Tapa 2: Kokeillaan eri lukuja ja huomataan, että esimerkiksi sata (tämän voi korvata muillakin ehdot toteuttavilla luvuilla) omenaa toimii: On nimittäin $100 = 99 + 1 + 3 \cdot 33 + 1$ eli kun omenat jaetaan kolmelle hengelle, jää yksi yli. Lisäksi $100 = 5 \cdot 20$ ja $100 = 98 + 2 = 7 \cdot 14 + 2$ eli omenat menevät tasan viidelle hengelle jaettaessa (kukin saa 20 omenaa) ja kaksi omenaa jää yli kahdelle hengelle jaettaessa.

HUOM! On mahdollista osoittaa, että täsmälleen omenamäärät

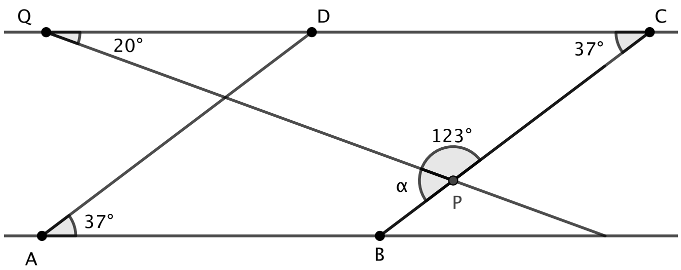
$$5 \cdot 7 \cdot 2 + 5 \cdot 3 \cdot 2 + 3 \cdot 5 \cdot 7n = 100 + 105n,$$

missä n on ei-negatiivinen kokonaisluku, toteuttavat halutut ehdot. (Tätä ei tarvita tehtävässä.)

2. Kuvassa oleva nelikulmio $ABCD$ on suunnikas. Laske kulma α.



Ratkaisu. **Vastaus:** On $\alpha = 57°$.



Olkoon piste P kulman α kärkipiste (kuten kuvassa). Lisäksi olkoon 20° kulman kärkipiste Q (kuten kuvassa).

Koska suorat AB ja CD sekä suorat AD ja BC ovat yhdensuuntaiset, niin $\angle DCB = \angle BAD = 37°$. Nyt kolmiosta CPQ saadaan

$$\angle CPQ = 180° - \angle PQC - \angle QCP = 180° - 20° - 37° = 123°.$$

Täten

$$\alpha = 180° - \angle CPQ = 180° - 123° = 57°.$$

3. Aino, Olivia, Pihla ja Sofia kilpailivat, kuka rakentaa palikoista korkeimman tornin. Kaikkien tornit olivat erikorkuiset. Kilpailun jälkeen yksi heidän ystävistään kysyi, mikä oli kilpailun tulos. Kukin kilpailijoista kertoi kaksi väitettä, joista toinen oli totta ja toinen valetta:
Aino: ”Minä pärjäsin Oliviaa paremmin ja Pihlaa huonommin.”
Olivia: ”Pihla ei voittanut, eikä Sofia.”
Pihla: ”Olivia pärjäsi Sofiaa paremmin ja Aino voitti.”
Sofia: ”Minä en ollut viimeinen, eikä myöskään Olivia.”

Mihin järjestykseen kilpailijat sijoittuivat?

Ratkaisu. **Vastaus:** Kilpailun sijoitukset voittajasta viimeiseen olivat: Pihla, Olivia, Aino, Sofia.

Olivian sanoman nojalla voidaan päätellä että joko Sofia tai Pihla voitti kilpailun. Näin ollen Aino ei voinut voittaa kilpailua, joten Pihlan kertoman perusteella Olivian täytyi pärjätä Sofiaa paremmin. Siis Olivia ei voinut voittaa kilpailua, joten Sofian sanoman perusteella hänen täytyi olla viimeinen.

Nyt siis, koska Sofia oli viimeinen, hän ei voinut voittaa, joten Olivian väitteiden mukaan Pihlan täytyi voittaa. Ainon väitteistä siis jälkimmäinen on totta, joten ensimmäisen on oltava valetta ja Aino pärjäsi Oliviaa huonommin. Siis Olivian täytyi olla toinen ja Ainon kolmas. Tällöin siis Ainon ensimmäinen väite on valetta ja toinen totta ja samoin Pihlan sekä Olivian ja Sofian ensimmäiset väitteet olivat valetta ja toiset totta.

4. Eino, Leo ja Oliver poimivat mummolleen mansikoita. Kun he kaikki poimivat mansikat yhdessä, heiltä kuluu 2,5 tuntia vähemmän aikaa kuin Einolta kuluisi mansikoiden poimimiseen yksin ja kolmasosa siitä ajasta, joka Oliverilta kuluisi mansikoiden poimimiseen yksin. Jos Eino ja Leo poimisivat mansikat kahdestaan, heiltä kuluisi niiden poimimiseen 45 minuuttia.

Kuinka kauan Einolta kuluisi mansikoiden poimimiseen yksin?

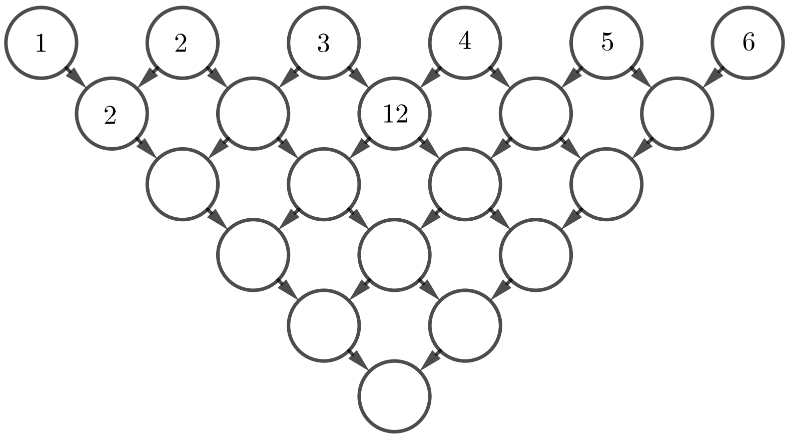
Ratkaisu. **Vastaus:** Einolta kuluisi kolme tuntia poimia mansikat yksin.

Koska Eino, Leo ja Oliver tekevät urakan samassa ajassa, missä Oliver tekee kolmasosan poimimisesta, ehtivät kaikki kolme poimia kolme kertaa mansikkamäärän siinä ajassa, missä Oliver poimii yhden urakan verran mansikoita. Siis Eino ja Leo poimivat kahden mansikkamäärän edestä marjoja, kun Eino, Leo ja Oliver pomivat kaikki yhdessä kolmen urakan edestä. Koska Einolta ja Leolta kuluu yhden urakan poimimiseen kahdestaan 45 minuuttia, niin kahden poimimisurakan valmistuminen kestää $2 \cdot 45 = 90$ minuuttia. Siis Oliverilta kuluu 90 minuuttia kerätä mansikat yksin. Näin ollen kaikilta kolmelta kestää $90/3 = 30$ minuuttia eli puoli tuntia poimia mansikat. Täten Eino keräisi mansikat yksin kolmessa tunnissa.

5. Alla olevassa kuviossa ylhäällä olevaan kuuteen ympyrään on kirjoitettu luvut $1, 2, 3, 4, 5$ ja 6. Tämän jälkeen aina kahden ympyrän välissä alapuolella olevaan ruutuun lasketaan kahdessa ylemmässä ympyrässä olevien lukujen tulo. Näistä kahdesta yläpuolella olevasta ympyrästä on selvyyden vuoksi piirretty nuoli alapuolella olevaan ympyrään. Esimerkiksi toisella rivillä vasemmassa reunassa olevaan ympyrään tulee luku 2, sillä on $1 \cdot 2 = 2$. Vastaavasti vasemmalta lukien kolmanteen ympyrään toisella rivilla tulee luku $3 \cdot 4 = 12$.

Kun näin jatketaan, kuinka monta nollaa on kuvion alimmaiseen ympyrään muodostuvan luvun lopussa?

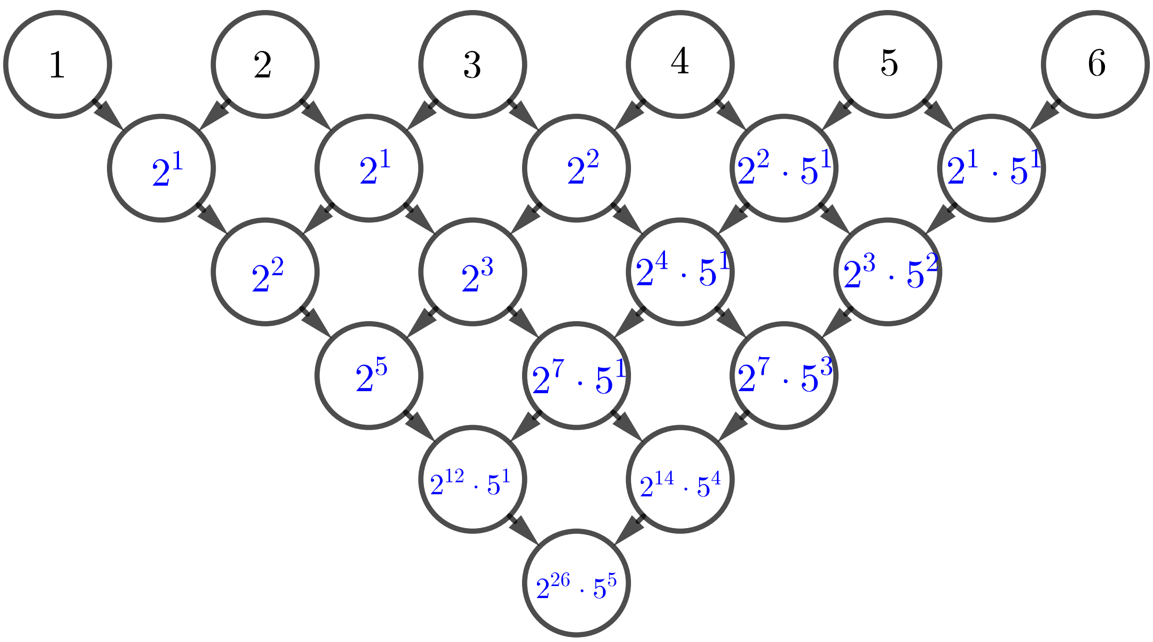
(Esimerkiksi luvun 300 lopussa on kaksi nollaa ja luvun 10 lopussa yksi nolla. Luvun 13 lopussa ei ole yhtään nollaa.)



Ratkaisu. **Vastaus:** Luvun lopussa on viisi nollaa.

Tapa 1: Huomataan, että luvun lopussa on täsmälleen niin monta nollaa kuin mikä on suurin kymmenen potenssi, joka jakaa luvun. Kun kerrotaan kokonaislukuja, niin luku 10 saadaan täsmälleen silloin, kun kerrotaan luku 2 ja 5 keskenään. Näin ollen on tutkittava lukujen 2 ja 5 potensseja.

Alla olevassa kuviossa on kirjattu sinisellä, mitä kakkosen tai vitosen potensseja ympyröihin saadaan. Siihen ei siis ole kirjoitettu koko tuloa, sillä koko tuloa ei ole tarpeen tarkastella tehtävässä.



Koska alimmaisessa ympyrässä on tämän päättelyn perusteella luku $2^{26} \cdot 5^5$, niin suurin kymmenen potenssi, joka jakaa luvun on 10^5, sillä suurempia vitosen potensseja ei esiinny ja kakkosen potensseja on tähän riittävästi. Siis luvun lopussa on viisi nollaa.

Tapa 2: Suoritetaan kaikki kertolaskut ja katsotaan, kuinka monta nollaa on alimman luvun lopussa. Kertolaskut löytyvät kuvasta. Alimman luvun lopussa on siis viisi nollaa.