

OULUN SEUDUN SEITSEMÄSLUOKKALAISTEN  
MATEMATIIKKAKILPAILU 28.2.–4.3.2022  
RATKAISUJA

1. Laske  $1 + 22 + 333 + 4444 + 55555$ .

- a) 59245    b) 60355    c) 65432    d) 65555    e) 666666

Ratkaisu. b) 60355:

$$1 + 22 + 333 + 4444 + 55555 = 1 + 355 + 59999 = 60000 + 355 = 60355$$

2. Laske

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$$

- a)  $\frac{1}{11}$     b)  $\frac{3}{11}$     c)  $\frac{1}{5}$     d)  $\frac{5}{6}$     e) 1

Ratkaisu. e) 1:

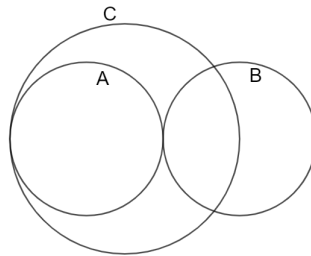
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{28} = \frac{14}{28} + \frac{7}{28} + \frac{4}{28} + \frac{2}{28} + \frac{1}{28} = \frac{14 + 7 + 4 + 2 + 1}{28} = \frac{28}{28} = 1.$$

3. Tupu, Hupu ja Lupu ovat valinneet yhdessä yhden luvun väliltä 1-20. Jokainen heistä kertoo tästä luvusta yhden asian, mutta yksi heistä valehtelee. Tupu sanoo, että heidän valitsemansa luku on jaollinen seitsemällä. Hupu sanoo, että luku on jaollinen viidellä. Lupu sanoo, että luku on jaollinen kolmella. Minkä luvun he valitsivat?

- a) 14    b) 15    c) 20    d) 16    e) 9

Ratkaisu. b) 15: Vain Hupun ja Lupun väittämät voivat olla yhtä aikaa totta, sillä muuten heidän valitsemansa luku olisi vähintään  $3 \cdot 7 = 21 > 20$  tai  $5 \cdot 7 = 35 > 20$ . Näin ollen heidän valitsemansa luku on jaollinen kolmella ja viidellä, ja 15 on ainoa tällainen luku lukujen 1 ja 20 välissä.

4. Ympyrät A ja B sivuavat toisiaan ja niiden molempien säde on 1. Ympyrä C sivuaa kuvan mukaisesti ympyrää A ja kulkee ympyrän B keskipisteen kautta. Lisäksi ympyröiden A ja C sivuamispaikka on samalla suoralla ympyröiden A ja B keskipisteiden kanssa. Mikä on ympyrän C säteen pituus?



- a) 1    b)  $\frac{4}{3}$     c)  $\frac{3}{2}$     d) 2    e) 3

Ratkaisu. c)  $\frac{3}{2}$ : Ympyrän C halkaisijan pituus on ympyrän A halkaisijan ja ympyrän B säteen pituuksien summa eli  $2 \cdot 1 + 1 = 3$ . Näin ollen ympyrän C säteen pituus on  $\frac{3}{2}$ .

5. Kuinka monella eri tavalla luku 2022 voidaan kirjoittaa kahden positiivisen kokonaisluvun summana, kun summattavien järjestystä ei huomioida? Tällöin siis esimerkiksi esitykset  $1 + 2021$  ja  $2021 + 1$  lasketaan vain yhdeksi tavaksi.

- a) 1010    b) 1011    c) 2020    d) 2021    e) 2022

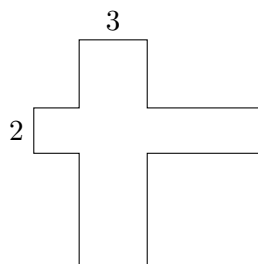
**Ratkaisu.** b) 1011: Koska summattavien järjestyksellä ei ole väliä, voidaan olettaa, että ensimmäinen summattava on korkeintaan yhtä suuri kuin toinen summattava. Näin saadaan laskettua kaikki tavat, sillä jos ensimmäinen summattava olisi toista suurempi, niin summattavien järjestys voitaisiin vaihtaa, ja saataisiin esitys, joka on jo laskettu. Koska pienempi summattava voi olla korkeintaan puolet luvusta 2022 eli 1011, niin ensimmäinen summattava on joku luvuista  $1, 2, \dots, 1011$ . Erilaisia summia on siis 1011 kappaletta.

6. Essi ja Ossi ovat 150 metrin päässä toisistaan, ja he lähtevät kävelemään samaan tahtiin toisiaan kohti. Essin askeleen pituus on 70 cm ja Ossin 80 cm. Kuinka monta askelta Essi ehtii ottaa ennen kuin he kohtaavat?

- a) 94    b) 100    c) 107    d) 188    e) 214

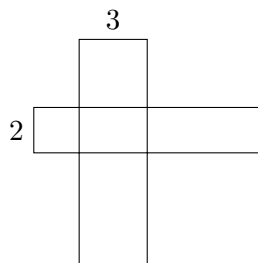
**Ratkaisu.** b) 100: Kun Essi ja Ossi kohtaavat, he ovat kävelleet yhteensä 150 metriä. Koska he kävelevät samaa tahtia, he ovat kohdatessaan molemmat kävelleet  $k$  askelta. Tällöin  $70k + 80k = 15000$ , joten  $k = 100$ .

7. Mikä on alla olevan kuvion pinta-ala, kun koko kuvion korkeus on 10 yksikköä ja leveys 10 yksikköä?



- a) 44    b) 48    c) 50    d) 56    e) 60

**Ratkaisu.** a) 44: Kuvion voi tulkita kahtena risteävänä kaistaleena alla olevan kuvan mukaisesti.



Pystysuoran kaistaleen pinta-ala on  $3 \cdot 10 = 30$  ja vaakasuoran kaistaleen  $2 \cdot 10 = 20$ . Koko alueen pinta-ala saadaan laskemalla kaistaleiden pinta-alat yhteen ja vähentämällä siitä kahteen kertaan laskettu kaistaleiden päällekkäin olevan osan pinta-ala  $2 \cdot 3 = 6$ . Koko alueen pinta-ala on siis  $30 + 20 - 6 = 44$ .

8. Matti haluaa lukea 1000-sivuisen kirjan. Hän lukee ensimmäisenä päivänä yhden sivun, ja tämän jälkeen jokaisena päivänä yhtä monta sivua kuin edellisinä päivinä yhteensä. Kuinka kauan kirjan lukemiseen menee?

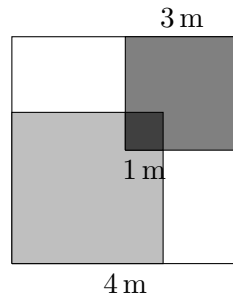
- a) 7 päivää    b) 11 päivää    c) 20 päivää    d) 35 päivää    e) 114 päivää

**Ratkaisu. b)** 11 päivää: Toisena päivänä Matti on lukenut  $1 + 1 = 2$  sivua, kolmantena  $2 + 2 = 4$  sivua, neljäntenä  $4 + 4 = 8$  sivua, viidentenä  $8 + 8 = 16$  sivua, kuudentena  $16 + 16 = 32$  sivua, seitsemäntenä  $32 + 32 = 64$  sivua, kahdeksantena  $64 + 64 = 128$  sivua, yhdeksäntenä  $128 + 128 = 256$  sivua, kymmenentenä  $256 + 256 = 512$  sivua, ja yhdenentoista päivänä  $512 + 512 = 1024 > 1000$  sivua.

**9.** Neliön muotoisen huoneen seinän pituus on 6 metriä. Huoneen lattialle lasketaan kolme neliön muotoista mattoa, joiden sivujen pituudet ovat 3, 4 ja 5 metriä. Mikä on suurin pinta-ala, joka lattiasta varmasti jää **jokaisen** maton alle riippumatta siitä, miten matot sijoitellaan?

- a)  $0,5 m^2$     b)  $1 m^2$     c)  $1,5 m^2$     d)  $2 m^2$     e)  $3 m^2$

**Ratkaisu. b)**  $1 m^2$ : Kun matot, joiden sivujen pituudet ovat 3 ja 4 metriä, asetetaan lattialle, jää lattiasta vähintään  $1 m^2$  kokoinen alue kummankin näistä alle. Alue, jonka molemmat matot peittävät, on nimittäin pienimmillään silloin, kun matot asetetaan huoneen vastakkaisiin nurkkiin alla olevan kuvan mukaisesti:



Jos matot asetetaan näin, niiden siirtäminen voi ainoastaan kasvattaa kuvan tummanharmaata aluetta, jonka molemmat matoista peittävät. Kun kolmas matto, jonka sivun pituus on 5 metriä, nyt asetetaan lattialle, se peittää välttämättä myös tämän tummanharmaan alueen huolimatta siitä, minne matto lasketaan.

**10.** Matemaatikon takapihalla kasvaa merkillinen puu: Sateisena päivänä puu kasvaa 10 cm, aurinkoisena päivänä 5 cm ja poutapäivänä 1 cm. Kymmenen päivän lomalta palattuun matemaatikko mittaa puun kasvaneen 58 cm. Millaisia päiviä kymmenen päivän aikana oli eniten?

- a) Sateisia päiviä    b) Aurinkoisia päiviä    c) Poutapäiviä    d) Kaikkia oli yhtä monta    e) Tehtävää ei voi ratkaista annetuilla tiedoilla.

**Ratkaisu. a)** Sateisia päiviä: Sateisina ja aurinkoisina päivinä puu kasvaa viidellä jaollisen määrän. Kun 58 jaetaan viidellä, jää jakojäännökseksi 3, joten poutapäivien lukumäärän on oltava 3 tai 8. Jos poutapäiviä olisi ollut 8, niin puu ei ehtisi saavuttaa 58 cm kasvua jäljelle jäävissä kahdessa päivässä, joten poutapäiviä on täytynyt olla 3. Näin ollen puu on kasvanut  $58 - 3 = 55$  cm seitsemänä sateisena tai aurinkoisena päivänä. Kohtuullisella vaivalla voidaan laskea ja tarkistaa, että ainoa mahdollisuus on, että sateisia päiviä oli 4, aurinkoisia 3 ja poutapäiviä 3:  $4 \cdot 10 + 3 \cdot 5 + 3 \cdot 1 = 58$ .

**11.** Tiedetään, että

$$a + b + c + d + e + f + g + h + i + j = 101$$

ja

$$a - b + c - d + e - f + g - h + i - j = 39.$$

Mitä on tällöin  $a + c + e + g + i$ ?

- a) 31    b) 62    c) 70    d) 140    e) Tehtävää ei voi ratkaista annetuilla tiedoilla.

**Ratkaisu. c) 70:** Laskemalla yhtälöt puolittain yhteen saadaan

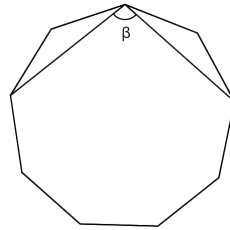
$$\begin{aligned} 2a + 2c + 2e + 2g + 2i &= 140 \\ 2(a + c + e + g + i) &= 140 \\ a + c + e + g + i &= \frac{140}{2} = 70. \end{aligned}$$

**12.** Erään säännöllisen monikulmion  $M$  voi jakaa janalla kahteen osaan siten, että muodostuu kaksi monikulmiota, joissa on yhteensä joko 7, 8 tai 9 kulmaa. Kuinka monta kulmaa on monikulmiossa  $M$ ?

- a) 3    b) 4    c) 5    d) 6    e) 7

**Ratkaisu. c) 5:** Kahdella näin saadulla monikulmiolla voi yhteensä olla joko kaksi, kolme tai neljä kulmaa enemmän kuin monikulmiolla  $M$ : Jos monikulmion  $M$  sisälle piirretty jana yhdistää kaksi kärkeä, muodostuu kaksi uutta kulmaa. Jos jana yhdistää monikulmion kärjen ja sivun, muodostuu kolme uutta kulmaa. Jos jana yhdistää monikulmion kaksi sivua, muodostuu neljä uutta kulmaa. Koska  $7 = 5 + 2$ ,  $8 = 5 + 3$  ja  $9 = 5 + 4$ , täytyy monikulmiolla  $M$  olla 5 kulmaa.

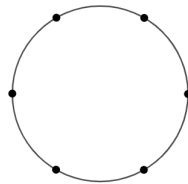
**13.** Säännölliseen 9-kulmioon on piirretty kaksi lävistäjää kuvan osoittamalla tavalla. Mikä on lävistäjien välisen kulman  $\beta$  suuruus?



- a)  $40^\circ$     b)  $70^\circ$     c)  $90^\circ$     d)  $100^\circ$     e)  $140^\circ$

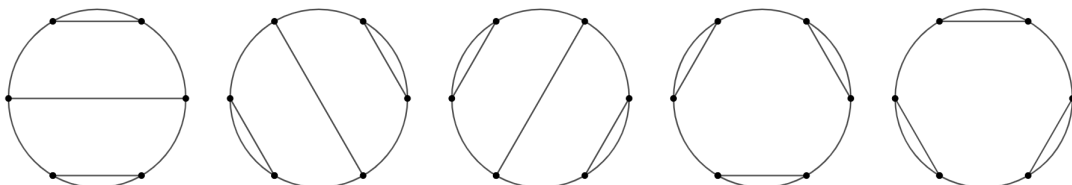
**Ratkaisu. d)  $100^\circ$ :** Säännöllisen 9-kulmion sisäkulman suuruus on  $\frac{7 \cdot 180^\circ}{9} = 140^\circ$ . Lävistäjät muodostavat 9-kulmion piirin kanssa kaksi samanlaista tasakylkistä kolmiota, joiden kantakulmien suuruus on tällöin  $\frac{180^\circ - 140^\circ}{2} = 20^\circ$ . Näin ollen kulman  $\beta$  suuruus on  $140^\circ - 2 \cdot 20^\circ = 100^\circ$ .

**14.** Ympyrän kehällä on 6 pistettä. Kuinka monella eri tavalla ne voidaan yhdistää pareittain janoilla siten, etteivät mitkään janat leikkaa toisiaan?



- a) 2    b) 3    c) 4    d) 5    e) 6

**Ratkaisu. d) 5:** Alla on kuvattuna kaikki mahdolliset tavat.



**15.** Eräs puhelinvalmistaja tietää kokemuksesta, että 2% tehtaalta lähtevistä puhelimista on viallisia. Kaikista valmistajalle palautetuista viallisista puhelimista 25% olivat viallisia jo tehtaalta lähtiessään. Kuinka suuri osa tehtaalta virheettöminä lähtevistä puhelimista palautetaan viallisena? Oletetaan, että kaikki viallisina lähteneet puhelimet palautetaan.

- a) 2%    b) 98%    c) 75%    d) 6%    e) 27%

**Ratkaisu.** d) 6% (pyöristettynä kokonaislukutarkkuuteen): Koska 2% kaikista puhelimista muodostaa 25% eli neljäsosan kaikista palautetuista puhelimista, on palautettavia puhelimia 8% kaikista tehtaalta lähtevistä puhelimista. Koska tehtaalta lähtevistä puhelimista 2% on viallisia, niin tällöin 6% tehtaalta lähtevistä puhelimista ovat niitä, jotka palautetaan vaikka ne lähtevät tehtaalta virheettöminä. Näin ollen, jos  $N$  on kaikkien tehtaalta lähtevien puhelimien lukumäärä, niin palautettavien puhelimien osuus niistä puhelimista, jotka lähtevät tehtaalta virheettöminä, on  $\frac{0,06 \cdot N}{0,98 \cdot N} \approx 0,06122 \approx 0,06 = 6\%$ .