Turun alueen 7.-luokkalaisten matematiikkakilpailu
Finaali 27.5.2023

Tehtävä 1 Suomen lippu on suorakaide, jonka korkeuden ja leveyden suhde on $11 : 18$. Lisäksi tiedetään, että sinisen ristin raitojen kummankin leveys on yksi kuudesosa koko lipun leveydestä. Miten suuri osa lipun pinta-alasta on sinistä?

Ratkaisu. Mittayksiköt voidaan valita siten, että lipun leveys on 18, korkeus 11 ja raitojen leveys $18/6 = 3$. Tällöin pystyraidan pinta-ala on $11 \cdot 3 = 33$ yksikköä, ja vaakaraidan $18 \cdot 3 = 54$ yksikköä. Ne leikkaavat 3×3 neliössä, jota ei saa laskea kahdesti. Sinisen alueen pinta-ala on siis kaikkiaan

$$33 + 54 - 9 = 78 \,\text{yksikköä.}$$

Koska lipun kokonaispinta-ala tässä mittakaavassa on $11 \cdot 18 = 198$ yksikköä, kysytty sinisen alan osuus on

$$\frac{78}{198} = \frac{13}{33}.$$

Tehtävä 2 Jotkin kokonaisluvut voidaan kirjoittaa useamman kuin yhden perättäisen positiivisen kokonaisluvun summana. Huomaamme, että 6 on tällainen summa, sillä $1 + 2 + 3 = 6$, ja samoin 9, koska $4 + 5 = 9$. Toisaalta helposti nähdään, että lukua 8 ei saada tällaisena summana. $3 + 4 = 7$ on liian pieni, $2 + 3 + 4 = 9$ taas liian suuri.

A) Miten luku 14 voidaan kirjoittaa tällä tavalla peräkkäisten kokonaislukujen summana?

B) Entä luku 40?

C) Mikä on pienin sellainen lukua 8 suurempi luku, jota ei saada tällaisena summana?

Ratkaisu. A-kohdan ainoa ratkaisu on $2 + 3 + 4 + 5 = 14$.

B-kohdassa ratkaisuksi käy $6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 40$. Huomaa, että tässä on viisi yhteenlaskettavaa, joiden keskiarvo on 8. Tämäkin on itse asiassa ainoa ratkaisu, mutta sen perusteleminen systemaattisen kokeilun kautta on työläämpää kuin A-kohdassa.

C-kohta on hankalampi. Kokeilemalla näemme, että $9 = 4+5$, $10 = 1+2+3+4$, $11 = 5+6$, $12 = 3+4+5$, $13 = 6+7$, $14 = 2+3+4+5$, $15 = 4+5+6$. Mutta lukua 16 ei voida kirjoittaa tällaisena summana. Tämän voi selvittää systeemaattisella kokeilulla, tai havaitsemalla, että tällaisella summalla on aina pariton tekijä, joka on > 1. Jos nimittäin summassa on parillinen määrä peräkkäisiä lukuja, niin ne voidaan laskea molemmista päistä alkaen parittain yhteen siten, että jokaisen parin summa on sama pariton luku. Esimerkiksi

$$3 + 4 + 5 + 6 = (3 + 6) + (4 + 5) = 9 + 9 = 2 \cdot 9.$$

Koska luvulla 16 ei ole tällaista tekijää (se on kakkosen potenssi), niin tämä ei anna summaksi 16:ta. Jos taas peräkkäisiä lukuja on pariton määrä, niin niiden joukossa on keskimäinen, ja jälleen summalla on pariton tekijä > 1. Esimerkiksi

$$5 + 6 + 7 = 3 \cdot 6.$$

Näin ollen tällaisenkaan summan arvo ei voi olla 16.

Päättely yleistyy, ja osoittautuu, että ne luvut, joita ei saada tällaisina summina ovat tarkalleen kakkosen potenssit $1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots$.

Tehtävä 3 Päiväkotiryhmä, jossa on 11 lasta ja päiväkodinopettaja, ovat retkellä korkeassa tornissa. He matkaavat ylös torniin hissillä, jossa saa olla enintään maksimipainon 350 kg verran ihmisiä kerrallaan. Lapset painavat kaikki saman verran, ja opettaja taas kolme kertaa saman verran kuin yksittäinen lapsi. Opettaja ja kaikki lapset mahtuvat hissiin, mutta jos mukana olisi harjoittelija, joka on opettajaa 10 kg kevyempi, niin opettajan ja harjoittelijan lisäksi hissiin mahtuisi enintään 9 lasta. Mitkä ovat mahdolliset kokonaislukuarvot yksittäisen lapsen painolle kilogrammoissa?

Ratkaisu. Merkitään lapsen painoa (kilogrammoina) luvulla x. Pidämme mielessä, että x on kokonaisluku. Tällöin opettajan paino on $3x$ ja harjoittelijan $3x - 10$. Koska hissi kantaa kaikki 11 lasta ja opettajan, voimme päätellä, että

$$11x + 3x \leq 350.$$

Tässä epäyhtälössä vasemmalla puolella on yhteensä $14x$. Koska $350/14 = 25$ seuraa tästä, että x on enintään 25.

Koska hissi kantaa myös opettajan, harjoittelijan, ja 9 lasta, voimme päätellä myös, että

$$9x + 3x + (3x - 10) \leq 350.$$

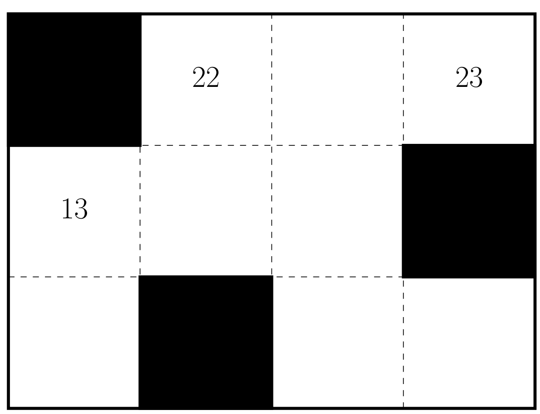
Tässä on vasemmalla puolella kaikkiaan $15x - 10$, joten on oltava $15x \leq 360$. Tästä seuraa, että x voi olla enintään $360/15 = 24$. Tämä ehto siis rajoittaa lukua x enemmän kuin ensimmäinen ehto.

Lisäksi tehtävässä kerrottiin, että hissi ei kanna 10 lasta yhdessä opettajan ja harjoittelijan kanssa. Tämä tarkoittaa sitä, että

$$10x + 3x + (3x - 10) > 350.$$

Nyt vasemmalla puolella on kaikkiaan $16x - 10$, joten tämä ehto on voimassa, kunhan $16x > 360$. Koska $360/16 = 90/4 = 22{,}5$, tämä tarkoittaa sitä, että jokainen lapsista painaa vähintään 22,5 kg. Koska paino on (tässä tehtävässä) kokonaisluku, niin lasten painon on oltava joko 23 kg tai 24 kg.

Tehtävä 4 Oheisessa ruudukossa on 9 valkoista ruutua. Niihin on kirjoitettava seuraavat yhdeksän lukua: $11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33$, kukin tasan yhden kerran. Sääntönä on että vieräkkäisiin ruutuihin tulevat luvut saavat erota toisistaan vain yhden numeron osalta. Esimerkiksi luvut 12 ja 13 voivat olla vierekkäisissä ruuduissa, koska ne eroavat toisistaan vain jälkimmäisen numeron osalta. Sitä vastoin luvut 23 ja 32 eivät voi olla vierekkäisissä ruuduissa, koska ne eroavat toisistaan molempien numeroiden osalta. Ruudukkoon on jo sijoitettu kolme lukua. Sijoita loput kuusi tyhjiin ruutuihin sääntöjen mukaisella tavalla.

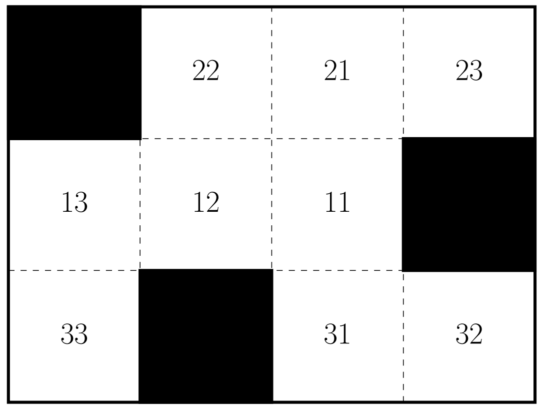


Voi olla hyvä idea kopioida osittain täytetty ruudukko vastauspaperiin siltä varalta, että joudut tekemään useita kokeiluja ratkaisua etsiessäsi.

Ratkaisu. Voimme heti päätellä, että ylös lukujen 22 ja 23 väliin on tultava luku 21. Muussa tapauksessa kyseisen luvun ensimmäinen numero ei olisi 2, jolloin se eroaisi jommasta kummasta muusta molempien numeroiden osalta.

Seuraavaksi huomaamme, että luvun 13 oikealle puolelle ja luvun 22 alapuolelle tulevalla luvulla on oltava yksi yhteinen numero kummankin kanssa, joten sen on oltava joko 12 tai 23. Koska 23 on jo käytetty, kyseiseen ruutuun on sijoitettava 12.

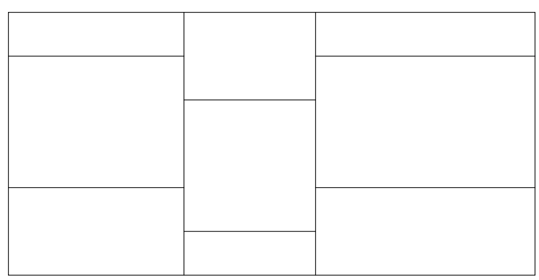
Tämän jälkeen huomataan samalla tavalla, että luvun 12 oikealle puolelle ja aiemmin sijoitetun luvun 21 alapuolelle on laitettava luku 11. Sijoittamatta ovat vielä luvut 31, 32 ja 33. Näistä ainoastaan 33 eroaa luvusta 13 vain toisen numeron osalta, joten vasempaan alanurkkaan on kirjoitettava 33. Samasta syystä luku



31 on kirjoitettava luvun 11 alapuolelle, ja jäljelle jäänyt 32 sopii oikeaaan alanurkkaan. Täytetty ruudukko ohessa.

Tehtävä 5 Kuvan ison suorakulmion kanta on kaksi kertaa sen korkeuden pituinen. Lisäksi iso suorakulmio on jaettu yhdeksään pieneen suorakulmioon, joiden sivut ovat yhdensuuntaiset ison suorakulmion sivujen kanssa. Näiden yhdeksän pienemmän suorakulmion piirien summa on 90 cm.

Mikä on ison suorakulmion pinta-ala?



Ratkaisu. Ison suorakulmion pinta-ala on $50\,\mathrm{cm}^2$.

Koska pienten suorakulmioiden sivut ovat yhdensuuntaiset ison suorakulmion sivujen kanssa, niin kolmen vaakasuunnassa vierekkäisen suorakulmion kantojen summa on yhtä pitkä kuin ison suorakulmion kanta. Vastaavasti kolmen pystysyynnassa allekkain olevan suorakulmion korkeuksien summa on yhtä pitkä kuin ison suorakulmion korkeus.

Näin ollen, kun lasketaan yhdeksän suorakulmion piirien summa, lasketaan kuusi kertaa ison suorakulmion kanta ja kuusi kertaa ison suorakulmion korkeus. (On huomattava, että osa kuvissa olevista janoista lasketaan kahdesti, koska ne ovat kahden pienemmän suorakulmion sivuja.) Näin ollen ison suorakulmion kannan ja korkeuden summa on $90\,\mathrm{cm}/6 = 15\,\mathrm{cm}$.

Koska ison suorakulmion kanta on kaksi kertaa suorakulmion korkeus, niin ison suorakulmion korkeus on $15\,\mathrm{cm}/3 = 5\,\mathrm{cm}$ ja kanta $2 \cdot 5\,\mathrm{cm} = 10\,\mathrm{cm}$. Näin ollen ison suorakulmion pinta-ala on $5\,\mathrm{cm} \cdot 10\,\mathrm{cm} = 50\,\mathrm{cm}^2$.