Turun sarja seitsemäsluokkalaisille

20. toukokuuta 2023

Yleiset ohjeet

- Jokaiseen tehtävään on tasan yksi oikea vaihtoehto.
- Taskulaskinten ja vastaavien apuvälineiden käyttö on kielletty.
- Tehtävät eivät ole vaikeusjärjestyksessä, mutta ensimmäiset tehtävät ovat luultavasti helpompia kuin viimeiset.

1 Tehtävät

1.1 Tehtävä

Mitä on $1 + 3 + 9 + 27$?

36

40

47

59

81

Ratkaisu.$1 + 9 = 10$ ja $3 + 27 = 30$, joten koko summa on 40.

1.2 Tehtävä

Englannissa oli vuoteen 1971 saakka käytössä rahajärjestelmä, jossa 1 punta oli arvoltaan sama kuin 20 shillinkiä, ja 1 shillinki puolestaan saman arvoinen kuin 12 pennyä. Robertilla oli rahaa 1 punta ja 4 pennyä, Stuartilla 5 shillinkiä ja 10 pennyä, Williamilla 2 shillinkiä ja 15 pennyä ja Johnilla 3 shillinkiä ja 8 pennyä. Pojat ostivat myyntikojusta limsapulloja.

Moneenko pulloon pojilla oli yhteensä varaa, kun yhden pullon hinta oli 3 shillinkiä?

8

9

10

11

12

Ratkaisu. Pojilla on yhteensä $20+5+2+3 = 30$ shillinkiä ja $4+10+15+8 = 37$ pennyä. Koska $37 = 3 \cdot 12 + 1$, niin yhteensä siis 33 shillinkiä ja 1 penny. Koska $11 \cdot 3 = 33$, pojilla on yhteensä varaa 11 pulloon, ja 1 penny jää yli.

1.3 Tehtävä

Heitetään kolikkoa. Kuinka monta kertaa sitä pitää heittää, jotta jompi kumpi kolikon puolista (kruuna tai klaava) tulee vähintään kahdesti?

Vaihtoehdot

2

3

4

5

6

Ratkaisu. Jos kaksi ensimmäistä heittoa antavat eri tulokset, niin jompi kumpi toistuu kolmannella heitolla. Oikea vastaus on siis 3.

1.4 Tehtävä

Mikä on suurin kokonaisluku, joka on pienempi kuin

$$\frac{1}{1/3 - 1/4 + 1/5 - 1/6}?$$

2

4

6

7

8

Ratkaisu. Vaiheittain laskemalla saadaan ensin nimittäjässä

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \qquad \text{ja} \qquad \frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{1}{30}.$$

Näin ollen nimittäjä on

$$\frac{1}{12} + \frac{1}{30} = \frac{5}{60} + \frac{2}{60} = \frac{7}{60}.$$

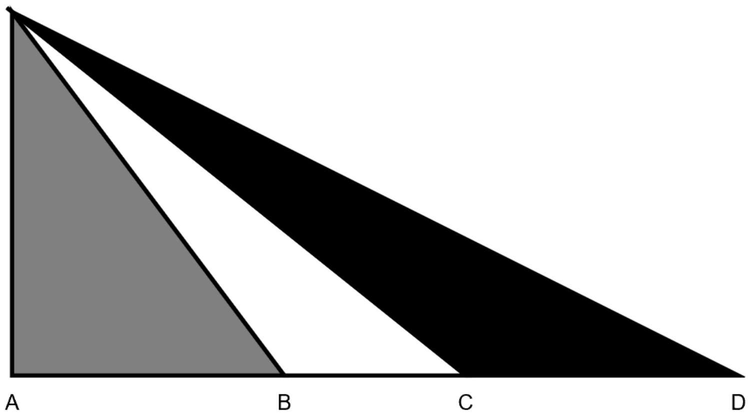
Tehtävän luku on siis

$$\frac{60}{7} = 8\frac{4}{7}.$$

Suurin sitä pienempi kokonaisluku on siis 8.

1.5 Tehtävä

Tiedämme, että oheisessa kuvassa pisteet A, B, C, D ovat kaikki samalla suoralla. Tiedämme, että janan AB pituus on 3 cm, janan BC pituus 2 cm ja janan BD pituus 5 cm. Mikä (tai mitkä) kuvan kolmesta kolmiosta on pinta-alaltaan suurin?



Vaihtoehdot:

Harmaa ja musta ovat yhtäsuuria ja suurempia kuin valkoinen

Harmaa on suurempi kuin muut

Valkoinen on suurempi kuin muut

Musta on suurempi kuin muut

Vastaus ei ole pääteltävissä annetuista tiedoista

Ratkaisu. Kaikilla kolmella kolmiolla on yhteinen korkeus h, mikä on niiden yhteisen kärjen etäisyys suorasta $ABCD$. Tehtävässä annettujen tietojen perusteella harmaan kolmion kanta on 3 cm, valkoisen 2 cm, ja mustan 3 cm. Näin ollen harmaalla ja mustalla kolmiolla on sama pinta-ala, mutta valkoisen kolmion pinta-ala on pienempi.

1.6 Tehtävä

Mikä on viisarikellon (tavallinen 12 tunnin kellotaulu) minuutti- ja tuntiviisarien välinen kulma, kun kello on 12:12?

Vaihtoehdot:

54°

60°

66°

72°

90°

Ratkaisu. Kello 12:00 olivat molemmat viisarit päällekkäin. Tuntiviisari kiertyy tunnissa osan $1/12$ täydestä kulmasta, eli $360/12 = 30$ astetta. Koska 12 minuuttia on viidesosata tunnista, tuntiviisari on 12 minuutissa kääntynyt $30/5 = 6$ astetta. Minuuttiviisari puolestaan kiertyy tunnissa täyden ympyrän, joten tunnin viidesosassa se on kiertynyt kulman $360/5 = 72$ astetta. Viisarien välinen kulma kysytylle hetkellä on näin ollen $72° - 6\circ = 66°$.

1.7 Tehtävä

Aino lähtee juoksulenkille. Hän juoksee ensin 500m pohjoiseen. Sitten hän kääntyy 90 astetta oikealle, ja juoksee 1300m. Tämän jälkeen hän kääntyy 90 astetta oikealle, ja juoksee 700m. Sitten hän kääntyy 90 astetta vasemmalle, ja juoksee 100m. Sen jälkeen hän tekee U-käännöksen (180 astetta), ja juoksee 1400m. Kuinka kaukana lähtöpisteestä hän nyt on?

$$0$$

$$200\,m$$

$$400\,m$$

$$600\,m$$

$$1000\,m$$

Ratkaisu. Huomataan, että lähtöpisteestä kuljetaan oikealle ensin 1300 metriä ja myöhemmin $1400 - 100 = 1300$ metriä. Siis ollaan lähtöpisteen ylä- tai alapuolella tai lähtöpisteessä. Toisaalta on kuljettu 500 metriä pohjoiseen ja 700 metriä etelään. Siis etäisyys lähtöpisteeseen on $700 - 500 = 200$ metriä.

Toinen tapa ratkaista tehtävä olisi piirtää kuva.

1.8 Tehtävä

Mikä on suurin positiivinen kokonaisluku n, jolle epäyhtälö

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{4} > \frac{1}{3}$$

on voimassa?

$$3$$

$$4$$

$$11$$

$$12$$

Tällaisten lukujen joukossa ei ole suurinta.

Ratkaisu. Annettu epäyhtälö on tosi silloin ja vain silloin, kun

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

Koska jaettaessa 1 positiivisella luvulla osamäärä on sitä pienempi, mitä suuremmalla luvulla jaetaan, voimme päätellä, että epäyhtälö toteutuu jos ja vain jos $n < 12$. Suurin tämän ehdon toteuttava kokonaisluku on $n = 11$.

1.9 Tehtävä

Essi ja Oiva pelaavat seuraavaa kolikonheittopeliä: Essi heittää kolikkoa niin kauan, että saa klaavan, jolloin kolikko siirtyy Oivalle, ja peli jatkuu samalla tavalla. Kun kolikkoa on heitetty yhteensä 20 kertaa, kolikko siirtyy Oivalle kolmannen kerran. Kuinka montaa kruunaa Essi ja Oiva ovat saaneet yhteensä pelin aikana?

15

16

17

18

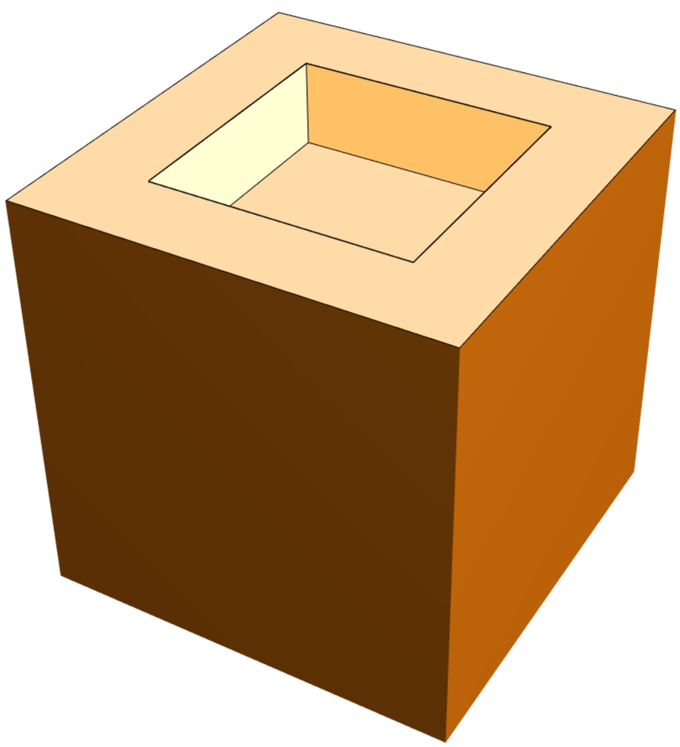
19

Ratkaisu. Kun kolikko siirtyy Oivalle kolmannen kerran, se on siirtynyt Essille kaksi kertaa, koska Essi aloitti pelin. Näin ollen klaavoja on tullut yhteensä 5 ja kruunia $20 - 5 = 15$.

1.10 Tehtävä

Oheisessa kuvassa on puinen kuutio, jonka särmän pituus on 5 cm. Sen yläpinnalle on koverrettu kolo, jonka poikkileikkaus on 3 cm × 3 cm neliö ja syvyys 1 cm.

Mikä on muodostuneen kappaleen pinta-ala (neliösenttimetreinä)? Ota huomioon myös ne pinnan osat, jotka eivät näy kuvassa.



156

159

162

Ratkaisu. Käsittelemättömän kuution pinta-ala olisi $A = 6a^2 = 150\,\mathrm{cm}^2$. Kovertamisen seurauksena sen yhdeltä tahkolta poistui $3\,\mathrm{cm} \times 3\,\mathrm{cm}$ kokoinen osa, mutta tarkalleen samankokoinen uusi pinta muodostui samalla kolon pohjalle. Lisäksi kololla on neljä seinää, kukin pinta-alaltaan $3\,\mathrm{cm} \times 1\,\mathrm{cm} = 3\,\mathrm{cm}^2$. Kaikkiaan koverrettaessa siis kappaleen pinta-ala kasvoi määrällä $4 \cdot 3\,\mathrm{cm}^2$ eli 12 neliösenttimetriä. Kuvan kappaleen pinta-ala on siis $162\,\mathrm{cm}^2$.

1.11 Tehtävä

Veetin luokitus eräässä kilpailullisessa videopelissä ilmaistaan kokonaislukuna. Tiedetään, että hänen luokituksensa kasvaa koulupäivänä 80 yksikköä ja vapaapäivänä joko 100 tai 200 yksikköä. Jos Veetin luokitus on aluksi 0 ja viikon kuluttua 840, kuinka monta vapaapäivää hänellä oli viikon aikana?

1

2

3

4

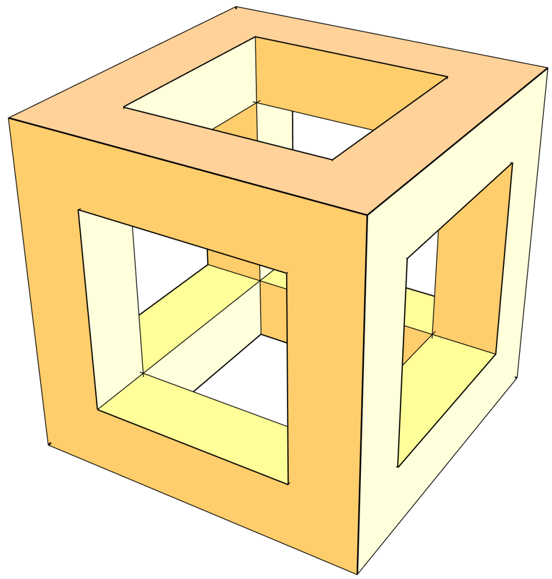
5

Ratkaisu. Vapaapäivänä Veetin luokituksen toiseksi viimeinen numero ei muutu (koska siihen lisätään joko 100 tai 200). Yksi koulupäivä nostaisi luokitusta 80, kaksi 160, kolme 240, neljä 320 ja viisi 400. Näistä ainoastaan kolmea koulupäivää vastaava 240 sopii siihen, että viikon lopussa luokituksen toiseksi viimeinen numero on nelonen. Vapaa päiviä on siis ollut $7 - 3 = 4$. Tarkistuksena toteamme vielä, että Veetin luokitus voi kasvaa neljänä vapaapäivänä $840 - 240 =$ 600:lla, sillä $600 = 100 + 100 + 200 + 200$.

1.12 Tehtävä

Tällä kertaa puukuutioon, särmän pituus $5\,\mathrm{cm}$, tehdään jokaiseen suuntaan, tahkojen keskelle $3\,\mathrm{cm} \times 3\,\mathrm{cm}$ kokoiset reiät kuutioin läpi, yhden senttimetrin päähän tahkojen reunoista. Kuva muodostuneesta kappaleesta alla.

Mikä on tämän kappaleen tilavuus?



$36\,\text{cm}^3$

$44\,\text{cm}^3$

$60\,\text{cm}^3$

$62\,\text{cm}^3$

$80\,\text{cm}^3$

Ratkaisu. Kuutiossa on 8 kärkeä ja 12 särmää. Kuvan kappaleessa on jokaisessa kärjessä tilavuudeltaan $1\,\text{cm} \times 1\,\text{cm} \times 1\,\text{cm}$ kokoinen pieni kuutio. Jokaisella särmällä on puolestaan jäljellä $1\,\text{cm} \times 1\,\text{cm} \times 3\,\text{cm}$ kokoinen palanen. Näin ollen jäljellä on puuta

$$8 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1\,\text{cm}^3 + 12 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3\,\text{cm}^3 = (8 + 36)\,\text{cm}^3 = 44\,\text{cm}^3.$$

Tehtävän voi ratkaista monella muullakin tavalla. Eräs toinen tapa olisi todeta, että aluksi kuution tilavuus oli $5^3 = 125\,\text{cm}^3$. Kuutiosta poistetaan keskeltä ylös/alas-suuntainen $3\,\text{cm} \times 3\,\text{cm} \times 5\,\text{cm}$ kokoinen pala, tilavuudeltaan siis $45\,\text{cm}^3$. Lisäksi neljästä muusta tahkosta poistetaan $3\,\text{cm} \times 3\,\text{cm} \times 1\,\text{cm}$ kokoiset palat, joiden yhteen laskettu tilavuus on $36\,\text{cm}^3$. Puuta poistettiin $81\,\text{cm}^3$, joten jäljelle jää $44\,\text{cm}^3$. $(125 - 81 = 44)$

1.13 Tehtävä

Oheisessa jonossa on lueteltu suuruusjärjestyksessä kaikki ne positiiviset kokonaisluvut, jotka ovat jaollisia kahdella tai kolmella (tai molemmilla). Mikä on jonon 2023. luku?

$$2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, \ldots$$

2302

2428

3034

3202

3333

Ratkaisu. Huomaamme, että väliltä $1--6$ on jonossa mukana neljä luku, nimittäin $2, 3, 4$ ja 6. Koska kuusi on jaollinen sekä kahdella että kolmella, tämä toistuu kuuden jaksoissa, eli väleiltä $7--12$, $13--18$ jne on kultakin jonossa mukana neljä lukua. Koska $2023 = 4 \cdot 505 + 3$, niin mukaan tulee 505 kappaletta tällaisia jaksoja. Koska $505 \cdot 6 = 3030$, niin tämä tarkoittaa sitä, että jonon 2020. luku on 3030. Kolme seuraavaa jonon lukua ovat $3032, 3033$ ja 3034, joten oikea vastaus on 3034.

1.14 Tehtävä

Leenu, Liinu ja Tiinu ovat valinneet kukin yhden kokonaisluvun. Heidän valitsemansa luvut ovat erisuuria.Tytöt tietävät toistensa valitsemat luvut, ja jokainen kertoo jotain valitsemastaan luvusta. Yksi heistä kuitenkin valehtelee.

Tiinu sanoo, että hänen lukunsa on kaikista suurin. Liinu puolestaan sanoo, että hänen valitsemansa luku on Leenun lukua pienempi eikä ole kaikkein pienin. Leenu väittää, että hänen valitsemansa luku on kaikista pienin.

Aseta Leenun, Liinun ja Tiinun valitsemat luvut suuruusjärjestykseen pienimmästä suurinpäin.

a) Leenun, Liinun ja Tiinun luku **b)** Leenun, Tiinun ja Liinun luku **c)** Liinun, Leenun ja Tiinun luku **d)** Liinun, Tiinun ja Leenun luku **e)** Tiinun, Liinun ja Leenun luku

Ratkaisu. Leenu ja Liinu väittävät molemmat heillä olevan pienempi luku kuin toisella, joten jompikumpi heistä valehtelee. Näin ollen Tiinu puhuu totta. Jotta Liinun väite olisi tosi, Tiinun luvun pitäisi olla kaikkein pienin, mutta näin ei ollut. Voimme siis päätellä, että Liinu valehtelee ja näin ollen myös Leenu puhuu totta. Leenun luku on siis pienin ja Tiinun suurin. Liinun luvun on pakko olla suuruudeltaan muiden välissä (vaihtoehto A).

1.15 Tehtävä

Saarella on sinisiä, punaisia ja vihreitä kameleontteja. Jos kaksi samanväristä kohtaa, ei tapahdu mitään, mutta aina kahden erivärisen kameleontin tavatessa, ne molemmat muuttavat värinsä siksi, mitä ei kummallakaan ollut aiemmin. Jos siis esimerkiksi sininen ja vihreä kameleontti kohtaavat, molemmat muuttuvat punaisiksi jne. Alussa saarella laskettiin olevan 3 sinistä, 4 punaista ja 5 vihreää kameleonttia. Jonkin ajan kuluttua kameleontit laskettiin uudestaan.

Seuraavista vain yksi EI ole mahdollinen uusintalaskun lopputulos. Mikä niistä?

11 sinistä ja 1 vihreä

11 punaista ja 1 sininen

11 vihreää ja 1 punainen

10 punaista, 1 sininen ja 1 vihreä

10 punaista ja 2 vihreää

Ratkaisu. Tehtävä on yksinkertaisinta ratkaista eliminoimalla väärät vaihtoehdot.

Jos ainoat kameleonttien kohtaamiset ovat 4 punaisen ja 4 vihreän tapaamiset, kaikki ne 8 muuttuvat sinisiksi. Näin ollen on mahdollista, että saarella olisi 11 sinistä ja 1 vihreä (vihreitä alussa 5, ja yksi niistä piti värinsä).

Jos ainoissa kohtaamisissa on 3 sinistä ja 3 punaista, niin punaisia jää jäljelle 1 ja vihreitä alkuperäisten viiden lisäksi kohtaamisten luomat 6, yhteensä 11. Tämäkin on siis mahdollinen uusintalaskennan tulos.

Samoin 10 punaiseen ja 2 vihreään päädytään yksinkertaisesti siten, että kohtaamisia on kolme kappaletta, jokaisessa mukana sininen ja vihreä.

11 punaista ja 1 sininen on myös mahdollinen tulos. Jos ensin punainen ja vihreää kohtaavat, niin saarella on sen jälkeen 5 sinistä, 3 punaista ja 4 vihreää. Jos sen jälkeen jokainen jäljellä olevista vihreistä kameleonteista tapaa sinisen, sinisiä jää jäljelle yksi, ja punaisia $3 + 8 = 11$.

Tiedämme siis, että vaihtoehdon: 10 punaista, 1 sininen, 1 vihreä on oltava mahdoton. Se voidaan perustella (mutta sen keksiminen kilpailuajan puitteissa olisi hyvin haastavaa?) seuraavasti. Merkitään saarella olevien vihreiden kameleonttien määrää V:llä ja sinisten S:llä. Aluksi $V - S = 1$. Pohditaan, mitä tälle erotukselle voi tapahtua. Jos sininen ja vihreä kameleontti kohtaavat, ei erotus muutu (sekä S että V pienenevät yhdellä). Jos sininen ja punainen kameleontti kohtaavat, S pienenee yhdellä ja V kasvaa kahdella, joten $V - S$ kasvaa kolmella. Jos taas vihreä ja punainen kohtaavat, V pienenee yhdellä ja S kasvaa kahdella, jolloin $V - S$ pienenee kolmella. Johtopäätöksenä tästä on, että erotus $V - S$ voi muuttua vain kolmen monikerroissa. Koska alussa $V - S = 1$, lopputilanne $V = 1, S = 1$ on näin ollen mahdoton.