Harjoitustehtävät, syyskuu 2011. Haastavammat

Ratkaisuja

1. *Osoita, että polynomia* $P(x,\, y) = x^{2011}y^{2011} + 1$ *ei voi kirjoittaa muotoon* $Q(x)R(y)$*, missä* Q *ja* R *ovat yhden muuttujan polynomeja.*

Ratkaisu. Oletetaan, että $x^{2011}y^{2011}+1 = Q(x)R(y)$. Silloin $Q(0)R(y) = 1$ kaikilla $y \in \mathbb{R}$ ja $Q(x)R(0) = 1$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Siis $Q(x)R(y)$ on kaikilla $(x,\, y) \in \mathbb{R}^2$ vakio $\dfrac{1}{Q(0)R(0)}$. Koska $P(x,\, y)$ selvästikään ei ole vakiopolynomi, tultiin ristiriitaan, joten vastaoletus on väärä. – *2. ratkaisu:* Jos tuloesitys olisi olemassa, niin $Q(x)$ ja $R(y)$ olisivat paritonta astetta 2011, joten kummallakin olisi ainakin yksi nollakohta, ja tulolla $Q(x)R(y)$ myös ainakin yksi nollakohta. Mutta $P(x,\, y) > 0$ kaikilla $x,\, y$.

2. *Toisen asteen polynomi* $P(x) = ax^2 + bc + c$ *on sellainen, että yhtälöllä* $P(x) = x$ *ei ole reaalilukuratkaisuja. Osoita, ettei myöskään yhtälöllä* $P(P(x)) = x$ *ole reaalilukuratkaisuja.*

Ratkaisu. Jos yhtälöllä $P(x) = x$ ei ole reaalilukuratkaisuja, $P(x)-x$ on samanmerkkinen kaikilla reaaliluvuilla x. Voidaan olettaa, että $P(x)-x > 0$ kaikilla x. Silloin $P(P(x))-x > P(P(x)) - P(x) > 0$ kaikilla reaaliluvuilla x. Yhtälö $P(P(x)) = x$ ei siis toteudu millään x.

3. *Olkoot* a *ja* b *polynomin* $x^2 - 6x + 1$ *nollakohdat. Osoita, että kaikilla kokonaisluvuilla* n *luku* $a^n + b^n$ *on viidellä jaoton kokonaisluku.*

Ratkaisu. Selvästi $a + b = 6$, $ab = 1$. Induktiolla nähdään, että $a^n + b^n$ on kokonaisluku kaikilla kokonaisluvuilla n. Ensinnäkin $a^0 + b^0 = 2$ ja $a^1 + b^1 = 6$ Koska $a^{n+1} + b^{n+1} = (a+b)(a^n + b^n) - ab^n - a^n b = 6(a^n + b^n) - ab(a^{n-1} + b^{n-1}) = 6(a^n + b^n) - (a^{n-1} + b^{n-1})$, induktioaskel voidaan ottaa sekä kasvavien että vähenevien kokonaislukueksponenttien suuntaan. Viidellä jaollisuuden tutkimista varten merkitään $x_n = a^n + b^n$. Silloin $x_{n+1} \equiv x_n - x_{n-1} \mod 5$. Modulo 5 on siten $x_0 \equiv 2$, $x_1 \equiv 1$, $x_2 \equiv -1$, $x_3 \equiv -2$, $x_4 \equiv -1$, $x_5 \equiv 1$, $x_6 \equiv 2$, $x_7 \equiv 1$. Voidaan päätellä, että $x_{k+6} \equiv x_k$ kaikilla $k > 0$. Lähtemällä parista $(x_6,\, x_7)$ voidaan samoin päätellä, että $x_{k-6} = x_k$ kaikilla $k \le 1$. Mikään x_k ei ole jaollinen viidellä.

4. *Polynomi* P *toteuttaa ehdon* $xP(x-1) = (x-13)P(x)$ *kaikilla* x*. Määritä* P*.*

Ratkaisu. Merkitään $P(x) = P_n(x)$, missä n on P:n eli P_n:n aste. Koska $P_n(0) = 0$, $P_n(x) = xP_{n-1}(x)$, missä P_{n-1} on jokin astetta $n-1$ oleva polynomi. Siis $xP(x-1) = x(x-1)P_n(x-1) = (x-13)P_n(x)$, joten $P_n(1) = 0$. Mutta silloin $P_{n-1}(1) = 0$, ja $P_{n-1}(x) = (x-1)P_{n-2}(x)$ ja $P_n(x) = x(x-1)P_{n-2}(x)$. Nyt $xP_n(x-1) = x(x-1)(x-2)P_{n-2}(x) = (x-13)P_n(x)$, joten $P_n(2) = 0$. Samoin jatkaen saadaan $P_n(3) = P_n(4) = \ldots = P_n(12) = 0$ ja $P_n(x) = x(x-1)(x-2)\cdots(x-12)P_{n-13}(x)$. Kun tämä sijoitetaan tehtävän yhtälöön, saadaan $x(x-1)\cdots(x-13)P_{n-13}(x-1) = (x-13)x(x-1)\cdots(x-12)P_{n-13}(x)$. Polynomi $P_{n-13}(x) = Q(x)$ toteuttaa yhtälön $Q(x) = Q(x-1)$ kaikilla $x \notin \{1,\, 2,\, \ldots,\, 13\}$. Polynomi

$Q(x) - Q(x-1)$ saa arvon 0 äärettömän monella arvolla x, joten se on kaikkialla $= 0$. Jos Q saisi kaksi eri arvoa a ja b, se saisi molemmat äärettömän monta kertaa. Tämä on polynomille mahdotonta (yhtälöllä $Q(x) = a$ on enintään Q:n asteluvun verran ratkaisuja, ellei Q ole vakio). Siis $Q(x) = a =$ vakio, ja $P(x) = ax(x-1)\cdots(x-12)$.

5. *Luvut $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ovat keskenään eri suuria kokonaislukuja. Osoita, että polynomia*

$$(x-a_1)^2(x-a_2)^2\cdots(x-a_n)^2+1$$

ei voi kirjoittaa kahden ei-vakion kokonaislukukertoimisen polynomin tuloksi.

Ratkaisu. Tehdään vastaoletus $(x-a_1)^2(x-a_2)^2\cdots(x-a_n)^2+1 = P(x)Q(x)$, missä $P(x)$ ja $Q(x)$ ovat kokonaislukukertoimisia ja ei-vakioita. Silloin $P(a_i)Q(a_i) = 1$, $i = 1, \ldots, n$, ja koska $P(a_i)$ ja $Q(a_i)$ ovat kokonaislukuja, on joko $P(a_i) = Q(a_i) = 1$ tai $P(a_i) = Q(a_i) = -1$. Jos olisi $P(a_i) = 1$ ja $P(a_j) = -1$, olisi $P(x) = 0$ jollain a_i:n ja a_j:n välissä olevalla luvulla x. Kuitenkin $P(x)Q(x) \geq 1$ kaikilla x. Oletetaan, että $P(a_1) = Q(a_1) = \ldots = P(a_n) = Q(a_n) = 1$. Silloin $P(x) - 1 = (x-a_1)\cdots(x-a_n)P_1(x)$ ja $Q(x) - 1 = (x-a_1)\cdots(x-a_n)Q_1(x)$. Mutta polynomin $P(x)Q(x)$ aste on $2n$, mistä seuraa, että $P_1(x)$ ja $Q_1(x)$ ovat vakiopolynomeja. Koska $P(x)Q(x)$:n astetta $2n$ olevan termin kerroin on 1, vakioiden tulo on 1, ja vakiot ovat molemmat 1 tai -1. Siis kaikilla x on $(x-a_1)^2(x-a_2)^2\cdots(x-a_n)^2+1 = (\pm(x-a_1)\cdots(x-a_n)+1)(\pm(x-a_1)\cdots(x-a_n)+1) = (x-a_1)^2\cdots(x-a_n)^2 \pm 2(x-a_1)\cdots(x-a_n)+1$. Mutta tämä merkitsee, että $(x-a_1)\cdots(x-a_n)$ on 0 kaikilla x. Ristiriita! Samaan päädytään, jos $P(a_i) = Q(a_i) = -1$ kaikilla $i = 1, \ldots, n$.

6. *Määritä ne alkulukukolmikot (a, b, c), joille pätee $a(b-c) = b+c$.*

Ratkaisu. Koska

$$a = \frac{b+c}{b-c} = 1 + \frac{2c}{b-c},$$

$(a-1)(b-c) = 2c$. Koska c on alkuluku, $a-1$ on joko 1, 2, c tai $2c$. Jos $a = 2$, $b = 3c$, eikä b ole alkuluku. Jos $a = 3$, $b = 2c$, eikä b ole alkuluku. Oletetaan, että $a = c+1$. Silloin $c(b-c) = 2c$ eli $b = c+2$. Nyt a, b ja c ovat kolme peräkkäistä kokonaislukua; tällaiset luvut eivät kaikki voi olla alkulukuja. Olkoon sitten $a = 2c+1$. Silloin $2c(b-c) = 2c$ eli $b = c+1$. Ainoat peräkkäiset luvut, jotka molemmat ovat alkulukuja, ovat 2 ja 3. Siis $(a, b, c) = (5, 3, 2)$ on ainoa mahdollinen tehtävän ehdot täyttävä kolmikko. Se myös toteuttaa alkuperäisen yhtälön.

7. *Määritä funktiot $f : \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \to \mathbb{R}$, joille pätee*

$$f(x) + \frac{1}{2x} f\left(\frac{1}{1-x}\right) = 1 \tag{1}$$

kaikilla $x \neq 0, 1$.

Ratkaisu. Kun lausekkeessa $\frac{1}{1-x}$ korvataan x $\frac{1}{1-x}$:llä, se muuntuu lausekkeeksi $\frac{x-1}{x}$ ja kun tässä lausekkeessa x korvataan $\frac{1}{1-x}$:llä, se muuntuu lausekkeeksi x. Kun tehtävän yhtälössä x korvataan $\frac{1}{1-x}$:llä, yhtälö muuttuu yhtälöksi

$$f\left(\frac{1}{1-x}\right)+\frac{1-x}{2}f\left(\frac{x-1}{x}\right)=1, \tag{2}$$

ja kun tässä yhtälössä x jälleen korvataan $\frac{1}{1-x}$:llä, se muuttuu yhtälöksi

$$f\left(\frac{x-1}{x}\right)+\frac{x}{2(x-1)}f(x)=1. \tag{3}$$

Kun yhtälöistä (1) ja (2) eliminoidaan $f\left(\frac{1}{1-x}\right)$, saadaan

$$f(x)-\frac{1-x}{4x}f\left(\frac{x-1}{x}\right)=1-\frac{1}{2x}, \tag{4}$$

ja kun yhtälöistä (3) ja (4) eliminoidaan $f\left(\frac{x-1}{x}\right)$, saadaan

$$\left(1-\frac{1}{8}\right)f(x)=1-\frac{1}{2x}+\frac{1-x}{4x},$$

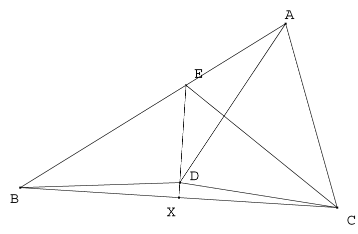
josta ratkaistaan

$$f(x)=\frac{6x-2}{7x}.$$

Tämä funktio toteuttaa yhtälön (1).

8. *Kolmiossa ABC on $\angle BCA = 2\cdot\angle ABC$. Kolmion sisällä on piste D, jolle pätee $BD = DC$ ja $AD = AC$. Osoita, että $\angle BAC = 3\cdot\angle BAD$.*

Ratkaisu. Olkoon $\angle ABC = \beta$, $\angle BCA = \gamma$ ja $\angle CBD = \phi$. Piirretään kulman $\angle ACB$ puolittaja CE. Koska $\angle ECB = \frac{1}{2}\gamma = \beta$, kolmio ECB on tasakylkinen. Pisteet E ja D ovat molemmat janan BC keskinormaalilla. Kolmiot ABC ja ACE ovat yhdenmuotoisia (kk). Siis $\frac{AC}{AE}=\frac{AB}{AC}$, ja koska $AC = AD$,



myös $\frac{AD}{AE}=\frac{AB}{AD}$. Mutta tästä seuraa, että kolmiot ADE ja ABD ovat yhdenmuotoisia (sks). Siis $\angle ADE = \angle ABD = \beta-\phi$. Olkoon X janan BC keskipiste. Koska $\angle DXB = 90°$, $\angle EDB = 90° + \phi$ ja $\angle BDA = \angle BDE + \angle EDA = 90° + \phi + \beta - \phi = 90° + \beta$. Nyt $\angle BAD = 180° - \angle ABD - \angle BDA = 90° - 2\beta + \phi$. Lisäksi $\angle ADC = \angle ACB = 2\beta - \phi$ ja siis lopulta $\angle CAD = 180° - 2\cdot ACD = 2\cdot 90° - 2(2\beta-\phi) = 2\cdot\angle BAD$. Tämä todistaa väitteen oikeaksi.

9. *Olkoon*

$$P(x) = x^{2011} + a_{2010}x^{2010} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0,$$

missä kaikki kertoimet a_k ovat kokonaislukuja. Olkoon $Q(x) = P(x)^2 - 25$. Osoita, että polynomilla Q on korkeintaan 2011 eri kokonaislukunollakohtaa.

Tehdään vastaoletus: Q:lla on ainakin 2012 eri kokonaislukunollakohtaa. Koska $Q(x) = (P(x) - 5)(P(x) + 5)$, ainakin toisella polynomeista $P(x) - 5$ ja $P(x) + 5$ on ainakin 1006 eri kokonaislukunollakohtaa. Oletetaan, että $P(x) - 5$:llä on ainakin 1006 eri kokonaislukunollakohtaa. (Polynomista $P(x) + 5$ tehtävä oletus hoituu samoin.) Olkoot ne $x_1, x_2, \ldots, x_{1006}$. Silloin

$$P(x) - 5 = S(x) \prod_{i=1}^{1006} (x - x_i), \tag{1}$$

missä S on jokin kokonaislukukertoiminen polynomi. Nyt jokaiselle kokonaisluvulle a, joka ei ole $P(x) - 5$:n nollakohta, pätee $|S(a)| \geq 1$ ja koska kaikki luvut $a - x_i$, $1 \leq i \leq 1006$ ovat eri kokonaislukuja ja nollasta eroavia, yhtälön (1) tulolausekkeen itseisarvo on ainakin $|503!|^2$. Nyt varmasti $P(a) + 5 = (P(a) - 5) + 10 \neq 0$. Tästä seuraa, että jokainen Q:n nollakohta on $P(x) - 5$:n nollakohta. Mutta polynomin $P(x) - 5$ aste on 2011, joten sillä ei voi olla 2012 eri nollakohtaa. Ristiriita osoittaa vastaoletuksen vääräksi.

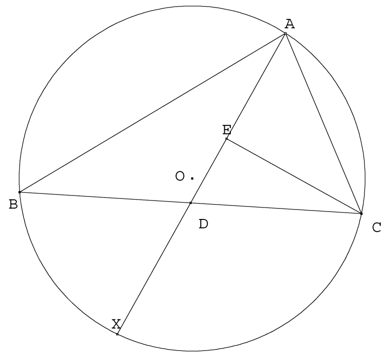
10. *Pyöräilykilpailu televisioitiin. Jo lähdössä Vikman polkaisi kärkeen, ja häntä seurasivat heti Viklund ja Vikberg. Nämä kolme olivat koko matkan muiden kilpailijoiden edellä. Heidän keskinäinen järjestyksensä vaihteli, mutta he eivät missään vaiheessa olleet kaikki kolme rinta rinnan. Juuri loppukirin aikaan ukkonen katkaisi televisiolähetyksen, ja kun yhteys palasi, kilpailu oli ohi. Turhautuneet katsojat saivat tietää vain, että johtopaikka vaihtoi omistajaa 19 kertaa ja kolmas sija 17 kertaa sekä sen, että Viklund jäi kolmanneksi. Kuka voitti ja miksi?*

Ratkaisu. Merkitään lyhyyden vuoksi M = Vikman, L = Viklund ja B = Vikberg. Alkujärjestys on MLB. Kun L vaihtaa sijoitustaan kahdesti, hän palaa sijalle 2. Koska L jäi kolmanneksi, hänen on täytynyt vaihtaa sijoitustaan pariton määrä kertoja. Sijoituksenvaihtoja on yhteensä parillinen määrä (36=19+17; jokainen sijoituksen vaihto koskee joko kärkisijaa tai kolmatta sijaa.) Ne sijoituksen vaihdot, joissa L ei ole toinen vaihtaja, koskevat B:n ja M:n keskinäisiä sijoituksen vaihtoja. Koska M oli alussa B:n edellä, parittoman vaihtomäärän jälkeen B on M:n edellä. Koska M ei ollut lopussa kolmas, M oli lopussa toinen ja B eli Vikberg oli voittaja.

11. *AD on kolmion ABC keskijana. Piste E on puolisuoralla AD niin, että $CE \perp AD$. Lisäksi $\angle ACE = \angle ABC$. Todista, että $AB = AC$ tai $\angle BAC$ on suora.*

Ratkaisu. Piirretään kolmion ABC ympäri ympyrä Γ; olkoon O sen keskipiste ja leikatkoon suora AD ympyrän Γ pisteessä X. Olkoon $\angle ABC = \beta$ ja $\angle BCE = \phi$. Silloin $\angle EDC = 90° - \phi$ ja $\angle BAX = \angle BAD = 90° - \phi - \beta$. Toisaalta oletuksen perusteella $\angle BCA = \beta + \phi$. Siis $\angle XCA = 90°$.

Mutta tämä merkitsee sitä, että AX on Γ:n halkaisija ja O on suoralla AX. Jos nyt O yhtyy pisteeseen D, niin BC on myös Γ:n halkaisija ja $\angle BAC$ on suora kulma. Jos O ei ole D, niin O on janan BC keskinormaalin piste. Kolmio, jonka keskijana yhtyy sivun keskinormaaliin, on tasakylkinen, joten tässä tapauksessa $AB = AC$.



12. *Lukujono (a_n) määritellään ehdoilla $a_1 = 0$ ja kaikilla $i \geq 1$ a_{i+1} on joko $a_1 + 1$ tai $-a_i - 1$. (Eräs tällainen jono voisi alkaa* 0, 1, 2, 3, −4, −3, 2, −3, ...*)*

Osoita, että jonon n:n ensimmäisen termin aritmeettinen keskiarvo on vähintään $-\frac{1}{2}$, kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n.

Ratkaisu. Koska $a_{i+1}^2 = (a_i+1)^2$, niin $2a_i+1 = a_{i+1}^2 - a_i^2$. Tästä saadaan "teleskooppinen summa"

$$2a_1 + 1 + 2a_2 + 1 + \cdots + 2a_n + 1 = a_{n+1}^2 - a_1^2 = a_{n+1}^2 \geq 0,$$

josta seuraa heti

$$\frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \geq -\frac{1}{2}.$$

13. *Tarkastellaan mitä hyvänsä n-kirjaimista ($n \geq 1$) merkkijonoa, jossa on esiintyy enintään 10 eri merkkiä (kuten* MATEMATIIKKAKULTAMITALI!!???*). Todista, että jonon kukin merkki voidaan korvata yhdellä numerolla niin, että eri merkkejä vastaavat eri numerot, ensimmäinen numero ei ole 0 ja syntyvä n-numeroinen luku on jaollinen yhdeksällä.*

Ratkaisu. Tunnetusti luku ja sen numeroiden summa ovat kongruentteja mod 9 ja mod 3. Jotta synnytetty luku olisi jaollinen 9:llä, sen numeroiden summan on oltava jaollinen yhdeksällä. Tähän ominaisuuteen eivät vaikuta luvun numeroissa olevat nollat eivätkä yhdeksiköt. Tarvittaessa 0 ja 9 voidaan vaihtaa, jotta ensimmäiseksi numeroksi saadaan muu kuin nolla. Menetellään nyt seuraavasti. Jos merkkijonossa on alle 10 eri merkkiä, lisätään siihen tarpeellinen määrä 0 kertaa esiintyviä merkkejä. Valitaan jokin merkki, joka esintyy jonossa q kertaa, korvataan se numerolla 9 ja korvataan muut yhdeksän merkkiä mielivaltaisella tavalla numeroilla 0, 1, ..., 8. Näin syntyy jokin luku x. Olkoon sitten $s(x)$ se luku, joka saadaan x:stä, kun 0:t vaihdetaan numeroiksi 1, 1:t numeroiksi 2, jne., ja viimein 8:t numeroiksi 0. Muunnoksessa $n - q = d$ numeroa on kukin kasvanut 1:llä mod 9, joten $s(x) \equiv x + d \mod 9$. Vastaavasti $s(s(x)) = s^2(x) \equiv x + 2d \mod 9$ ja $s^j(x) = x + jd \mod 9$. Jos nyt

$$x + jd \equiv 0 \mod 9 \tag{1}$$

jollain j, on löydetty merkkien ja numeroiden vastaavuus, jolla merkkijonoa vastaava luku on jaollinen 9:llä. Jos d ei ole kolmella jaollinen, luvut d, $2d$, $3d$, ..., $9d$ ovat pareittain epäkongruentteja mod 9. Tässä tapauksessa kongruenssilla (1) on ratkaisu. Oletetaan sitten, että kaikki jonkin merkin korvaamiset 9:llä johtavat tilanteeseen $n - q \equiv 0 \mod 3$.

Jokaisen jonossa esiintyvän merkin esiintymislukumäärä on silloin $\equiv n \bmod 3$. Tämä merkitsee, että miten tahansa merkit numeroilla korvataankin, syntynyt luku x on kongruentti luvun $n(0+1+\cdots+9)$ kanssa $\bmod 3$. Mutta $1+2+\cdots+9=45$ on jaollinen 3:lla, joten x:kin on. Tässä tapauksessa kongruenssi (1) voidaan jakaa 3:lla: haetaan

$$\frac{x}{3}+j\frac{d}{3} \equiv 0 \bmod 3.$$

Samoin kuin edellä, todetaan, että tällä kongruensilla on ratkaisu aina, kun $\dfrac{d}{3}$ ei ole jaollinen 3:lla eli kun d ei ole jaollinen 9:llä. Jäljelle jää tapaus, jossa kaikki tietyn merkin korvaamiset 9:llä johtavat tilanteeseen $n-q \equiv 0 \bmod 9$. Silloin jokaisen merkin esiintymisten määrä jonossa on $\equiv n \bmod 9$. x on silloin kongruentti luvun $n(0+1+\cdots+9)=45n \equiv 0$ kanssa $\bmod 9$, eli x on yhdeksällä jaollinen miten tahansa merkit numeroilla korvataankin.