Tammikuun 2012 vaativammat kirjevalmennustehtävät

Mieluiten käsin puhtaaksikirjoitetut ratkaisut voi lähettää helmikuun loppuun mennessä osoitteeseen

Esa Vesalainen
Huddingenpolku 2A15
01600 Vantaa

Kysymyksiä voi esittää sähköpostitse osoitteeseen

esavesalainen@gmail.com

1. Etsi kaikki positiiviset kokonaisluvut n, joille luvulla $n\,(n+2)(n+4)$ on enintään 15 positiivista tekijää.

2. Mille positiivisille kokonaisluvuille $n \geqslant 3$ löytyy konveksi n-kulmio, joka voidaan jakaa äärellisen moneksi suunnikkaaksi?

3. Avaruudessa on annettu 20 pistettä, joista mitkään kolme eivät ole samalla suoralla. Osoita, että näiden pisteiden määräämien tasojen lukumäärä ei voi olla 1111.

4. Olkoot a, b ja c positiivisia reaalilukuja, joille $ab + bc + ca = 1$. Todista:

$$\arctan\frac{1}{a} + \arctan\frac{1}{b} + \arctan\frac{1}{c} = \pi.$$

5. Ympyrän sisään on piirretty sellainen $2n$-kulmio, että n sen sivuista ovat pituudeltaan a, ja loput n sen sivuista ovat pituudeltaan b. Mikä on ympyrän säde?

6. Olkoot $a, b, c, d \in [0, \pi]$ sellaisia, että

$$2\cos a + 6\cos b + 7\cos c + 9\cos d = 0$$

ja

$$2\sin a - 6\sin b + 7\sin c - 9\sin d = 0.$$

Osoita, että

$$3\cos(a+d) = 7\cos(b+c)\,.$$

7. Todista, että luku $3^{4^5} + 4^{5^6}$ on kahden lukua 10^{2002} suuremman luonnollisen luvun tulo.

8. Olkoon $ABCD$ konveksi nelikulmio, ja olkoon P kulmien $\widehat{DAC}$ ja $\widehat{DBC}$ ulkokulmanpuolittajien (eli vieruskulmien puolittajien) leikkauspiste. Osoita, että $\widehat{APD} = \widehat{BPC}$ jos ja vain jos $AD + AC = BC + BD$.

9. Olkoon S kolmion $\triangle ABC$ ympäripiirretyn ympyrän keskipiste, ja merkitään $\alpha = \widehat{BAC}$ ja $\beta = \widehat{CBA}$. Leikatkoot suorat CS ja AB pisteessä D, joka on pisteiden A ja B välissä. Osoita, että

$$\frac{|SD|}{|SC|} = \left|\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}\right|.$$

10. Kolmion $\triangle ABC$ sisäänpiirretty ympyrä sivuaa kolmion sivuja AB ja AC pisteissä M ja N. Olkoon P suoran MN ja kulman $\widehat{ABC}$ puolittajan leikkauspiste. Osoita, että $BP \perp CP$.