Tammikuun 2012 vaativammat kirjevalmennustehtävät
Ratkaisuita ja ratkaisuhahmotelmia

1. Etsi kaikki positiiviset kokonaisluvut n, joille luvulla $n\,(n+2)(n+4)$ on enintään 15 positiivista tekijää.

Ratkaisu. Kun n käy läpi arvot $1, 2, \ldots, 10$, luvun $n\,(n+2)(n+4)$ tekijöiden lukumäärä käy läpi arvot 4, 10, 8, 14, 12, 24, 12, 28, 12 ja 40.

Jos $n \geqslant 11$ on parillinen, eli $n = 2k$ jollakin $k \in \mathbb{Z}_+$, niin $n(n+2)(n+4) = 2^3k\,(k+1)(k+2)$. Ainakin yksi luvuista k, $k+1$ ja $k+2$ on jaollinen luvulla 2 ja ainakin yksi niistä on jaollinen luvulla 3. Koska $k \geqslant 6$, eivät kaikki luvuista k, $k+1$ ja $k+2$ voi olla lukujen 2 ja 3 potensseja. Siispä jokin muu alkuluku p varmasti jakaa jonkin niistä. Nyt luvulla $n\,(n+2)(n+4)$ on tekijä $2^4 \cdot 3 \cdot p$, jolla on $5 \cdot 2 \cdot 2 = 20$ tekijää.

Jos $n \geqslant 11$ on pariton, niin n ja $n+2$ ovat keskenään suhteellisia alkulukuja, samoin kuin $n+2$ ja $n+4$, sekä n ja $n+4$. Jokin luvuista n, $n+2$ ja $n+4$ on jaollinen luvulla 3, ja on joko luvun 3 potenssi, jolloin se on vähintään 3^3 koska $n > 9$ tai sillä on jokin muu alkulukutekijä p. Olkoon muilla kahdella luvulla alkutekijät q ja r, jotka ovat välttämättä erisuuria keskenään ja lukujen 3 ja p kanssa. Nyt luvulla $n\,(n+2)(n+4)$ on tekijä $3pqr$, jolla on $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ tekijää, tai tekijä 3^3qr, jolla on $4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ tekijää.

Kysytyt luvut ovat siis 1, 2, 3, 4, 5, 7 ja 9.

2. Mille positiivisille kokonaisluvuille $n \geqslant 3$ löytyy konveksi n-kulmio, joka voidaan jakaa äärellisen moneksi suunnikkaaksi?

Ratkaisu. Todistamme, että halutunlainen monikulmio löytyy kun n on parillinen, ja ettei sellaista löydy kun n on pariton.

Tarkastellaan n-kulmiota, joka on ositettu äärellisen moneksi suunnikkaaksi. Olkoon jokin sen sivu a. Nyt jonkin suunnikkaan sivu on janalla a. Olkoon kyseisen suunnikkaan vastakkainen sivu b_1. Nyt, jos b_1 ei ole alkuperäisen monikulmion sivulla, niin b_1 leikkaa epätriviaalisti jonkin toisen suunnikkaan sivua. Olkoon tämän uuden suunnikkaan vastakkainen sivu b_2. Näin jatkamalla saadaan jono janoja $a \parallel b_1 \parallel b_2 \parallel \ldots$, kunnes lopulta päädytään jonkin suunnikkaan sivuun joka sisältyy johonkin alkuperäisen monikulmion sivuun c. Nyt siis $a \parallel c$.

Koska konveksilla monikulmiolla ei mitenkään voi olla kolmea keskenään yhdensuuntaista sivua, seuraa tästä, että alkuperäisen monikulmion sivut voi jakaa keskenään yhdensuuntaisten sivujen pareiksi, ja n on parillinen.

Seuraavaksi todistamme induktiolla, että halutunlainen monikulmio todella löytyy kun $n \geqslant 3$ on parillinen. Kun $n = 4$, tämä on helppoa: esimerkiksi neliö kelpaa tähän tehtävään mainiosti. Oletetaan sitten, että jollakin parillisella $n \geqslant 4$ on olemassa halutut ehdot toteuttava n-kulmio.

Valitaan nyt mikä tahansa induktio-oletuksen n-kulmion kulma. Ja siirretään sitä sen ulkokulmanpuolittajan suunnassa yksikön verran oikealle, ja kiertäen myötäpäivään, siirretään kutakin kärkeä oikealle riittävän monta (mutta ei liian monta) kertaa. Jos tilanteesta piirtää kuvan, on selvää, että näin saadaan halutunlainen konveksi $n+2$-kulmio.

3. Avaruudessa on annettu 20 pistettä, joista mitkään kolme eivät ole samalla suoralla. Osoita, että näiden pisteiden määräämien tasojen lukumäärä ei voi olla 1111.

Ratkaisu. Tehdään se vastaoletus, että tasojen lukumäärä voi olla tasan 1111. Koska 20 pistettä määräävät enintään $\binom{20}{3} = 1140$ tasoa, $1140 - 1111 = 29$ pistekolmikkoa sijaitsee muiden kolmikoiden määräämillä tasoilla.

Jos taso sisältää 7 pistettä tai enemmän, niin ainakin $\binom{7}{3} = 35$ pistekolmikkoa sijaitsee kyseisellä tasolla, jolloin pisteiden määräämiä tasoja on enintään $1140 - 34 = 1106$. Siis jokainen taso sisältää enintään kuusi annetuista pisteistä.

Olkoon a niiden tasojen lukumäärä joilla on tasan neljä annetuista pisteistä, b niiden tasojen lukumäärä joilla on tasan viisi annetuista pisteistä, ja c niiden tasojen lukumäärä joilla on tasan kuusi. Nyt binomikerroin $\binom{20}{3}$ laskee kunkin ensimmäisistä tasoista $\binom{4}{3} - 1 = 3$ ylimääräistä kertaa, kunkin seuraavista tasoista $\binom{5}{3} - 1 = 9$ ylimääräistä kertaa, ja kunkin viimeisistä $\binom{6}{3} - 1 = 19$. Tasojen lukumäärä on nyt $1140 - 3a - 9b - 19c$.

Koska $3a + 9b + 19c = 29$, ja $3 \nmid 29$, on $c \neq 0$. Toisaalta, $2 \cdot 19 > 29$, eli $c < 2$. Täten $c = 1$ ja $3a + 9b = 10$. Mutta nyt $3 \mid 10$, mikä on mahdotonta ja olemme valmiit.

4. Olkoot a, b ja c positiivisia reaalilukuja, joille $ab + bc + ca = 1$. Todista:

$$\arctan \frac{1}{a} + \arctan \frac{1}{b} + \arctan \frac{1}{c} = \pi.$$

Ratkaisu. Merkitään $\alpha = \arctan \frac{1}{a}$, $\beta = \arctan \frac{1}{b}$ ja $\gamma = \arctan \frac{1}{c}$. Näillä merkinnöillä

$$\tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{ab + bc + ca}{abc} = \frac{1}{abc} = \tan \alpha \tan \beta \tan \gamma.$$

Summat $\alpha + \beta$, $\beta + \gamma$ ja $\gamma + \alpha$ eivät kaikki voi olla yhtä suuria kuin $\frac{\pi}{2}$, koska muutoin olisi $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{4}$ ja edelleen $a = b = c = 1$ ja $ab + bc + ca = 3 \neq 1$. Symmetrian vuoksi voimme olettaa, että $\alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2}$.

Nyt

$$\begin{aligned}\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} &= \frac{\tan \alpha \tan \beta \tan \gamma - \tan \gamma}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \\ &= -\tan \gamma = \tan(\pi - \gamma),\end{aligned}$$

ja lopuksi, koska $0 < \alpha + \beta < \pi$ ja $0 < \pi - \gamma < \pi$, täytyy olla $\alpha + \beta = \pi - \gamma$, eli $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

5. Ympyrän sisään on piirretty sellainen $2n$-kulmio, että n sen sivuista ovat pituudeltaan a, ja loput n sen sivuista ovat pituudeltaan b. Mikä on ympyrän säde?

Ratkaisu. Olkoon kysytty säde R ja sivuja a ja b vastaavat keskuskulmat α ja β. Selvästi $\beta = \frac{2\pi}{n} - \alpha$, ja siten

$$\begin{aligned}\frac{a}{\sin \frac{\alpha}{2}} = 2R = \frac{b}{\sin \frac{\beta}{2}} = \frac{b}{\sin\left(\frac{\pi}{n} - \frac{\alpha}{2}\right)} &= \frac{b}{\sin \frac{\pi}{n} \cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\pi}{n} \sin \frac{\alpha}{2}} \\ &= \frac{b}{\sin \frac{\pi}{n} \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2}} - \cos \frac{\pi}{n} \sin \frac{\alpha}{2}},\end{aligned}$$

joten

$$a \sin \frac{\pi}{n} \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = b \sin \frac{\alpha}{2} + a \cos \frac{\pi}{n} \sin \frac{\alpha}{2}$$

ja pienen sieventämisen jälkeen

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{a^2 \sin^2 \frac{\pi}{n}}{a^2 + b^2 + 2ab \cos \frac{\pi}{n}}.$$

Sinilause sanoo nyt, että

$$R = \frac{a}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \frac{\pi}{n}}}{2 \sin \frac{\pi}{n}}.$$

6. Olkoot $a, b, c, d \in [0, \pi]$ sellaisia, että

$$2\cos a + 6\cos b + 7\cos c + 9\cos d = 0$$

ja

$$2\sin a - 6\sin b + 7\sin c - 9\sin d = 0.$$

Osoita, että

$$3\cos(a+d) = 7\cos(b+c).$$

Ratkaisu. Siirtämällä keskimmäiset termit oikealle puolelle ja neliöimällä puolittain, saadaan yhtälöt

$$4\cos^2 a + 81\cos^2 d + 36\cos a\cos d = 36\cos^2 b + 49\cos^2 c + 84\cos b\cos c$$

ja

$$4\sin^2 a + 81\sin^2 d - 36\sin a\sin d = 36\sin^2 b + 49\sin^2 c - 84\sin b\sin c,$$

jotka yhteenlaskemalla näemme, että

$$4 + 81 + 36\cos(a+d) = 36 + 49 + 84\cos(b+c),$$

mikä sieventyykin muotoon $3\cos(a+d) = 7\cos(b+c)$.

7. Todista, että luku $3^{4^5} + 4^{5^6}$ on kahden lukua 10^{2002} suuremman luonnollisen luvun tulo.

Ratkaisu. On helppo tarkistaa tekijöihinjako

$$\begin{aligned} 3^{4^5} + 4^{5^6} &= \left(3^{4^4}\right)^4 + 4\left(4^{\frac{5^6-1}{4}}\right)^4 \\ &= \left(\left(3^{4^4}\right)^2 + 2\cdot 3^{4^4}\cdot 4^{\frac{5^6-1}{4}} + 2\cdot\left(4^{\frac{5^6-1}{4}}\right)^2\right) \\ &\quad \cdot\left(\left(3^{4^4}\right)^2 - 2\cdot 3^{4^4}\cdot 4^{\frac{5^6-1}{4}} + 2\cdot\left(4^{\frac{5^6-1}{4}}\right)^2\right), \end{aligned}$$

missä molemmat tekijät ovat suurempia kuin

$$4^{\frac{5^6-1}{4}} = 2^{\frac{5^6-1}{2}} = 2^{\frac{15625-1}{2}} = 2^{7812} = 10^{7812\log_{10}2} > 10^{7812\cdot\frac{1}{3}} = 10^{2604} > 10^{2002}.$$

8. Olkoon $ABCD$ konveksi nelikulmio, ja olkoon P kulmien $\widehat{DAC}$ ja $\widehat{DBC}$ ulkokulmanpuolittajien (eli vieruskulmien puolittajien) leikkauspiste. Osoita, että $\widehat{APD} = \widehat{BPC}$ jos ja vain jos $AD + AC = BC + BD$.

Ratkaisu. Olkoot r ja s kulmien $\widehat{DAC}$ ja $\widehat{DBC}$ ulkokulmanpuolittajat. Olkoon pisteen C peilikuvat suorien s ja r suhteen C' ja D'. Koska r on ulkokulmanpuolittaja, C', B ja D ovat samalla suoralla, ja $C'B = CB$. Siten $C'D = C'B + BD = BC + BD$. Samoin $D'C = AD + AC$. Merkitään $\beta = \widehat{BPC} = \widehat{BPC'}$, samoin kuin $\alpha = \widehat{APD} = \widehat{APD'}$, sekä $\gamma = \widehat{CPD}$.

Tarkastellaan kolmioita $\triangle C'PD$ ja $\triangle CPD'$. Koska $PD' = PD$ ja $PC' = PC$, nämä kolmiot ovat yhtenevät jos ja vain jos kulmat pisteessä P ovat yhtä suuret, tai yhtäpitävästi, että kolmannet vastinsivut ovat yhtä pitkät. Mutta tehtävänannon ehdoista ensimmäinen sanoo, että $\widehat{C'PD} = 2\beta + \gamma = 2\alpha + \gamma = \widehat{CPD'}$, ja jälkimmäinen, että $C'D = CD'$, mikä puolestaan osoitettiin jo yhtäpitäväksi sen kanssa, että $AD + AC = BC + BD$.

9. Olkoon S kolmion $\triangle ABC$ ympäripiirretyn ympyrän keskipiste, ja merkitään $\alpha = \widehat{BAC}$ ja $\beta = \widehat{CBA}$. Leikatkoot suorat CS ja AB pisteessä D, joka on pisteiden A ja B välissä. Osoita, että

$$\frac{|SD|}{|SC|} = \left|\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}\right|.$$

Ratkaisu. Koska $SC = SA$, on $\frac{SD}{SC} = \frac{SD}{SA}$, ja sinilause sanoo, että

$$\frac{SD}{SA} = \frac{\sin \widehat{DAS}}{\sin \widehat{ADS}}.$$

Merkitään kolmion $\triangle ABC$ kulmia α, β ja γ. Jos α tai β ei ole terävä, niin D ei sijaitse pisteiden A ja B välissä. Käsittelemme erikseen kolme tapausta:

Tapaus 1, jossa kolmio $\triangle ABC$ on terävä: Koska $\widehat{ASB} = 2\gamma$ ja kolmion $\triangle ABS$ on tasakylkinen, on $\widehat{DAS} = \widehat{BAS} = 90° - \gamma$. Samoin,

$$\widehat{ADS} = \widehat{ADC} = \widehat{DBC} + \widehat{BCD} = \beta + 90° - \alpha$$

ja siten

$$\frac{\sin \widehat{DAS}}{\sin \widehat{ADS}} = \frac{\sin(90° - \gamma)}{\sin(\beta + 90° - \alpha)} = \frac{\cos\gamma}{\cos(\beta - \alpha)}.$$

Koska $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$, on $\cos\gamma = -\cos(\alpha+\beta)$, eli

$$\frac{SD}{SC} = -\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}.$$

Tapaus 2, jossa kulma γ on suora: Piste D on sama kuin hypotenuusan keskipiste S, joten $SD = 0$. Lisäksi $\alpha + \beta = 90°$, eli $\cos(\alpha+\beta) = 0$. Todistettavan väitteen molemmat puolet siis häviävät ja asia on selvä.

Tapaus 3, jossa kulma γ on tylppä: Samoin kuin tapauksessa 1 voimme päätellä, että

$$\frac{SD}{SC} = \frac{\sin \widehat{DAS}}{\sin \widehat{ADS}} = \frac{\sin(\gamma - 90°)}{\sin(\alpha + 90° - \beta)} = -\frac{\cos\gamma}{\cos(\beta-\alpha)} = \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}.$$

10. Kolmion $\triangle ABC$ sisäänpiirretty ympyrä sivuaa kolmion sivuja AB ja AC pisteissä M ja N. Olkoon P suoran MN ja kulman $\widehat{ABC}$ puolittajan leikkauspiste. Osoita, että $BP \perp CP$.

Ratkaisu. Olkoon kolmion sisään piirretyn ympyrän keskipiste I, ja merkitkööt α, β ja γ kolmion kulmia pisteissä A, B ja C.

Nelikulmio $AMIN$ on jännenelikulmio jonka eräs halkaisija on AI. Koska $\widehat{IAN} = \widehat{IMN} = \frac{\alpha}{2}$, on $\widehat{PMB} = 90° + \frac{\alpha}{2}$.

Koska $\widehat{CBI} = \frac{\beta}{2}$ ja $\widehat{BCI} = \frac{\gamma}{2}$, on $\widehat{CIB} = 90° + \frac{\alpha}{2}$.

Tämä tarkoittaa sitä, että $\triangle CIB \sim \triangle PMB$ ja

$$\frac{|BI|}{|BM|} = \frac{|BC|}{|BP|}.$$

Koska $\widehat{PBM} = \widehat{CBI}$, on oltava $\triangle BMI \sim \triangle BPC$. Lopuksi $\widehat{BPC} = \widehat{BMI} = 90°$.